

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ**

---

**Я. Г. СИНАЙ**

**СОВРЕМЕННЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
ЭРГОДИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ**



**МОСКВА**

**ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА**

**«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»**

**1995**

ББК 22.16  
С38  
УДК 519.21

*Издание осуществлено при финансо-  
вой поддержке Российского фонда фун-  
даментальных исследований согласно  
проекту 94-01-01387*

*Серия «Современные проблемы математики»  
издается с 1930 года*

Синай Я. Г. Современные проблемы эргодической теории.—  
М.: Физматлит, 1995.—208 с.—(Современные проблемы математики;  
вып. 31).—ISBN 5-02-014123-2

Содержит изложение основных общих понятий и конструкций эргодической теории и их применение для анализа различных классов гладких динамических систем, включая одномерные отображения, гиперболические динамические системы и динамические системы статистической механики.

Для студентов и научных работников—математиков и физиков-теоретиков.

Ил. 38. Библиогр. 154 назв.

*Серия выпускается под общим руководством  
редакционной коллегии журнала  
«Успехи математических наук»*

С  $\frac{1602070000-001}{053(02)-95}$  25-92

ISBN 5-02-014123-2

© Я. Г. Синай, 1995

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
<b>Часть I. Общая эргодическая теория .....</b>	<b>7</b>
Лекция 1. Измеримые преобразования, инвариантные меры, эргодические теоремы .....	7
Лекция 2. Пространства Лебега и измеримые разбиения. Эргодичность и разложение на эргодические компоненты, перемешивание. Спектр динамической системы. Перекладывания отрезков .....	19
Лекция 3. Изоморфизм динамических систем. Образующие разбиения .....	31
Лекция 4. Динамические системы с чисто точечным спектром .....	39
Лекция 5. Общие свойства собственных функций и собственных значений эргодических автоморфизмов. Изоморфизм динамических систем с чисто точечным спектром .....	45
<b>Часть II. Энтропийная теория динамических систем .....</b>	<b>53</b>
Лекция 6. Первоначальные определения и простейшие свойства энтропии. Примеры вычисления энтропии .....	53
Лекция 7. Теорема Бреймана, разбиение Пинскера, K-системы, точные эндоморфизмы .....	66
Лекция 8. Энтропия динамических систем с многомерным временем. Системы клеточных автоматов как динамические системы .....	73
<b>Часть III. Одномерная динамика .....</b>	<b>82</b>
Лекция 9. Непрерывные дроби и дроби Фарея .....	82
Лекция 10. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы окружности .....	89
Лекция 11. Порядок Шарковского и универсальность Фейгенбаума .....	103
Лекция 12. Растягивающие отображения окружности ....	115

Часть IV. Элементы двумерной динамики .....	127
Лекция 13. Стандартное отображение, или отображение Чирикова, отображение с перекручиванием, периодические траектории, теория Обри— Мезера .....	127
Лекция 14. Периодические гиперболические точки, их устойчивые и неустойчивые многообразия, гомоклинические и гетероклинические траек- тории .....	136
Лекция 15. Гомоклинические и гетероклинические точки и стохастические слои .....	154
Часть V. Элементы теории гиперболических динамических систем .....	162
Лекция 16. Геодезические потоки и их обобщения, раз- рывные динамические системы, устойчивые и неустойчивые многообразия .....	162
Лекция 17. Существование локальных многообразий. Гиббсовские меры .....	177
Лекция 18. Марковские разбиения, $H$ -теорема, элементы термодинамического формализма .....	186
Предметный указатель .....	199

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга может рассматриваться как продолжение моей книги «Введение в эргодическую теорию», изданной в Ереванском университете в 1973 г. Она состоит из пяти частей.

В части I вводятся основные понятия эргодической теории и элементы спектральной теории динамических систем, включая теорию динамических систем с чисто точечным спектром. Большинство излагаемых здесь вопросов можно найти во многих других источниках. Некоторым исключением служит включение в спектральную теорию отображения, возникающего в теории Фейгенбаума, и обсуждение связи теории интегрируемых гамильтоновых систем с теорией динамических систем с чисто точечным спектром.

Часть II посвящена энтропийной теории. Ее можно считать более или менее завершенным разделом эргодической теории. Мы касаемся только основных вопросов, необходимых для приложений. В последней лекции рассматриваются системы клеточных автоматов. Их энтропийные свойства были недавно предметом разнообразных обсуждений.

Часть III называется «Одномерная динамика». Теория одномерных динамических систем чрезвычайно популярна сейчас и тесно связана с голоморфной динамикой. Впрочем, этой связи мы здесь не касаемся. Одна лекция посвящена доказательству теоремы Эрмана, найденному К. М. Ханиным и мною и основанному на идеях метода ренормгруппы. Следующая лекция содержит доказательство теоремы Шарковского и обсуждение теории универсальности Фейгенбаума. Последняя лекция посвящена теории растягивающих отображений. Доказательство основной теоремы проводится в духе термодинамического формализма, о котором подробнее идет речь в части V.

Часть IV называется «Элементы двумерной динамики». Здесь мы рассматриваем некоторые свойства стандартного

отображения или отображения Чирикова, обсуждаем идеи теории Обри—Мезера. Кроме того, вводятся гомоклинические и гетероклинические точки, стохастические слои и объясняются причины, по которым они называются стохастическими.

Лекция 14 содержит доказательство теоремы, дающей оценку сверху угла, характеризующего расщепление сепаратрис. Это доказательство принадлежит И. П. Корнфельду и мне и прежде не публиковалось. Необходимо отметить, что получаемая оценка не является наилучшей.

В части V рассматривается теория гиперболических динамических систем. В целом ряде вопросов наш подход можно считать новым. В некоторых случаях мы объясняем основные идеи или проводим доказательства для наиболее характерных примеров.

Редактор книги Е. И. Динабург внимательно прочитал рукопись и сделал много полезных замечаний. Ряд изменений в рукописи был внесен в результате обсуждений с К. М. Ханиным и Д. Косыгиным. Пользуюсь случаем поблагодарить их за помощь.

## ЧАСТЬ I

### ОБЩАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

В этой части вводятся основные понятия эргодической теории и описываются различные примеры. Сюда также включены элементы спектральной теории динамических систем, включая теорию динамических систем с чисто точечным спектром.

#### ЛЕКЦИЯ I

#### ИЗМЕРИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ, ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Эргодическая теория изучает статистические свойства детерминированных динамических систем. Под статистическими свойствами понимаются свойства, выражающиеся через поведение средних по времени от различных функций, вычисляемых вдоль траекторий динамических систем. Слова «детерминированные динамические системы» подразумевают, что в уравнения, задающие закон движения, не входят никакие случайные возмущения, шумы и т. п. Тем самым возникающая статистика определяется исключительно свойствами динамики.

Поскольку эргодическая теория, как и теория вероятностей, основана на понятии меры, то первоначальные ее понятия вводятся в терминах общей теории меры.

Мы предполагаем, что задано измеримое пространство, т. е. пара  $(M, \mathcal{M})$ , где  $M$  — абстрактное множество, а  $\mathcal{M}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. В дальнейшем  $M$  будет фазовым пространством динамической системы. Выбор  $\sigma$ -алгебры во всех последующих ситуациях не вызывает затруднений, и мы будем часто опускать ее обозначение.

**Определение 1.** *Эндоморфизмом измеримого пространства  $(M, \mathcal{M})$  называется отображение  $T$  пространства  $M$  на себя такое, что  $T^{-1}C \in \mathcal{M}$  для любого  $C \in \mathcal{M}$ .*

**Определение 2.** *Автоморфизмом измеримого пространства  $(M, \mathcal{M})$  называется такое обратимое отображение  $T$ , что  $T$  и  $T^{-1}$  — эндоморфизмы  $(M, \mathcal{M})$ .*

Если  $T$  — автоморфизм, то  $TC, T^{-1}C \in \mathcal{M}$  для любого  $C \in \mathcal{M}$ . За определениями 1, 2 молчаливо скрывается пред-

положение о том, что действие  $T$  задается измеримыми функциями, и никакие дополнительные предположения типа гладкости не накладываются.

В этой книге мы, как правило, будем рассматривать только нормированные, т. е. вероятностные, меры на  $(M, \mathcal{M})$ , не оговаривая этого особо.

**Определение 3.** Мера  $\mu$  называется инвариантной мерой эндоморфизма  $T$ , если  $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$  для любого  $C \in \mathcal{M}$ .

Если  $T$  — автоморфизм, то, обозначив  $C' = T^{-1}C$ , имеем  $\mu(TC') = \mu(C')$ . В случае автоморфизмов множества  $C'$  пробегает всю  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{M}$ , когда множества  $C$  пробегают всю  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{M}$ . Таким образом, в случае автоморфизмов инвариантность меры означает, что  $\mu(C) = \mu(TC) = \mu(T^{-1}C)$  для любого  $C \in \mathcal{M}$ .

**Лемма 1.** Для произвольного эндоморфизма  $T$  и инвариантной меры  $\mu$

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(Tx) d\mu(x).$$

Утверждение леммы для индикаторов множеств эквивалентно инвариантности меры. Для конечных линейных комбинаций индикаторов утверждение следует из линейности интеграла. Общий случай получается предельным переходом. Приведем сразу же пример, наглядно иллюстрирующий, почему в определении инвариантности  $\mu$  следует брать  $T^{-1}$ , а не  $T$ . Кроме того, этот пример будет неоднократно встречаться в дальнейшем.

**Пример 1.** Пусть  $M = [0, 1]$ ,  $x \in M$ ,  $Tx = \{1/x\}$ , где  $\{\cdot\}$  — обозначение дробной части. Преобразование  $T$  есть эндоморфизм, поскольку для всех точек  $x_k = \frac{1}{k+x}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , их образ  $Tx_k = x$ . Будем искать инвариантную меру  $\mu$  в виде  $d\mu(x) = \rho(x) dx$ . Тогда из определения инвариантной меры для плотности  $\rho(x)$  мы получаем следующее уравнение:

$$\rho(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \rho\left(\frac{1}{k+x}\right) |dx_k|,$$

где  $|dx_k|$  — длина бесконечно малого интервала, переходящего под действием  $T$  в  $dx$ . Легко видеть, что  $|dx| = x_k^{-2} |dx_k|$ . Поэтому

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho\left(\frac{1}{k+x}\right) (k+x)^{-2}. \quad (1)$$

Проверим, что функция  $\rho(x) = \frac{1}{\ln 2 \cdot (1+x)}$  удовлетворяет послед-



нему уравнению. Множитель  $\frac{1}{\ln 2}$  введен для нормировки, и мы его отбросим. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k+x}} (k+x)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1+x)(k+x)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1+x} \right) = \frac{1}{1+x}.$$

В честь Гаусса, впервые рассмотревшего преобразование  $T$  и определившего указанную формулу для инвариантной меры  $\mu$ , преобразование  $T$  носит название *эндоморфизма Гаусса*. Это преобразование тесно связано с теорией цепных дробей (см. лекцию 9). Доказательство единственности решения (1) гораздо менее тривиально (см. далее).

Пример 2. Пусть, как и выше,  $M = [0, 1]$  и  $Tx = \{f(x)\}$ , где  $f$  — функция класса  $C^1$  такая, что для каждого  $x \in [0, 1]$  число точек  $y$ , для которых  $\{f(y)\} = x$ , конечно. Будем по-прежнему искать плотность инвариантной меры в виде  $d\mu(x) = \rho(x) dx$ . Тогда для  $\rho$  получаем уравнение

$$\rho(x) = \sum_{y | \{f(y)\} = x} \frac{\rho(y)}{|f'(y)|}. \quad (1')$$

Это уравнение называется *уравнением Перрона — Фробениуса — Рюзля*. Вопрос о существовании его решений далеко не прост. Иногда это объясняется тем, что искомые решения имеют сложные особенности, связанные с разрывами  $f$  или нулями  $f'$ .

Перенесем определения 1 и 2 на случай *непрерывного времени*.

Пусть  $\mathbf{R}^+$  — полугруппа неотрицательных чисел и для каждого  $t \in \mathbf{R}^+$  задан эндоморфизм  $T^t$  измеримого пространства  $(M, \mathcal{M})$ , причем  $T^t T^s = T^{t+s}$  для любых  $t, s > 0$ .

**Определение 4.** Полугруппа  $\{T^t\}$  называется *измеримым полупотоком*, если для любой измеримой функции  $f$  функция  $f(T^t x)$  измерима на прямом произведении измеримых пространств  $(M, \mathcal{M}) \times (\mathbf{R}^+, \mathcal{R}^+)$ .

Пусть  $\mathbf{R}$  — группа всех действительных чисел  $t$ ,  $-\infty < t < \infty$ , и для каждого  $t$  задан автоморфизм  $T^t$ , причем  $T^t T^s = T^{t+s}$ .

**Определение 5.** Группа  $\{T^t\}$  называется *измеримым потоком*, если для любой измеримой функции  $f$  функция  $f(T^t x)$  измерима на прямом произведении измеримых пространств  $(M, \mathcal{M}) \times (\mathbf{R}, \mathcal{R})$ .

Мера  $\mu$  инвариантна относительно полупотока (потока), если она инвариантна относительно любого эндоморфизма (автоморфизма), входящего в полупоток (поток).

Можно показать, что в случае измеримых потоков на сепарабельных пространствах с мерой интеграл  $\int f(T^t x) f(x) d\mu(x)$  есть непрерывная функция  $t$ . Далее под *динамической системой* мы будем понимать эндоморфизм, автоморфизм, измеримый полупоток или измеримый поток, сохраняющие меру. В дальнейшем эпитет «измеримый» будет опускаться. Автоморфизмом пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  называется автоморфизм измеримого пространства  $(M, \mathcal{M})$ , для которого мера  $\mu$  инвариантна. Мы будем также говорить, что  $T$  сохраняет меру  $\mu$ . Аналогичная терминология применяется к эндоморфизмам, полупотокам и потокам. Приведем сейчас несколько основных примеров динамических систем, к которым мы будем неоднократно обращаться.

**1. Групповые сдвиги.** Пусть  $M$  — компактная топологическая группа, на которой имеется вероятностная мера  $\mu$ , инвариантная относительно левых сдвигов. Тогда преобразование  $T_g x = gx$  для любого  $g \in M$  есть автоморфизм пространства  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Если  $\{g_t\}$  — однопараметрическая подгруппа  $\{-\infty < t < \infty\}$ , то  $T^t x = g_t x$  — поток на пространстве  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Для нас особенно важны случаи, когда  $M$  есть  $d$ -мерный тор,  $M = \text{Tor}^d$ . Пусть его точки записаны в виде  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  и каждое  $x_i$  принимает значение из полуинтервала  $[0, 1)$ . Если  $g = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in M$ , то мы получаем сдвиг на торе  $T_g x = (x_1 + \omega_1, x_2 + \omega_2, \dots, x_d + \omega_d)$ , где запись  $x_d + \omega_d$  понимается здесь и далее как сложение на группе, т. е.  $x_i + \omega_i \pmod{1}$ . Аналогично,  $T^t x = (x_1 + t\omega_1, x_2 + t\omega_2, \dots, x_d + t\omega_d)$  есть поток, называемый условно-периодическим потоком на торе. В приложениях  $x_1, \dots, x_d$  часто отвечают циклическим переменным типа «фаза». Если циклическая подгруппа  $g^n$ ,  $-\infty < n < \infty$ , состоит из попарно различных элементов, то  $T_g$  не имеет периодических траекторий.

**2. Косые сдвиги на группах.** Пусть  $M = \text{Tor}^d$ . Косым сдвигом на  $M$  называется преобразование  $T$  следующего вида:

$$T(x_1, \dots, x_d) = (x_1 + \omega_1, x_2 + f_1(x_1), \\ x_3 + f_2(x_1, x_2), \dots, x_d + f_{d-1}(x_1, \dots, x_{d-1})),$$

которое, очевидно, сохраняет меру Хаара  $\mu$ . Такие преобразования встречаются в приложениях эргодической теории к теории чисел.

**3. Групповые автоморфизмы и эндоморфизмы.** Пусть  $M = \text{Tor}^d$ ,  $T$  — групповой автоморфизм, т. е. взаимнооднозначное непрерывное отображение группы  $\text{Tor}^d$  на себя, переводящее сумму в сумму,  $T(x + y) = Tx + Ty$ . Можно показать, что

$T$  задается целочисленной матрицей,  $T = \|a_{ij}\|$ ,  $a_{ij}$  — целые и  $\det T = \pm 1$ , и действует по формуле  $(Tx)_i = \sum a_{ij}x_j \pmod{1}$ . В силу равенства  $\det T = \pm 1$  автоморфизм  $T$  сохраняет меру Хаара  $d\mu = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ . Если  $|\det T| > 1$ , то  $T$  задает групповой эндоморфизм  $M$  на себя. Значение  $|\det T|$  равно числу прообразов любой точки. В этом случае  $T$  будет эндоморфизмом пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

Уже сейчас можно увидеть разницу между групповыми автоморфизмами и групповыми сдвигами. Возьмем на торе  $\text{Tor}^d$  конечную подгруппу  $G$  точек вида  $x = (p_1/q, p_2/q, \dots, p_d/q)$ , где  $p_j$  — целые числа. Тогда  $Tx \in G$  для любого  $x \in G$ , т. е.  $G$  — инвариантная конечная подгруппа. Всякая такая подгруппа состоит из периодических траекторий. Тем самым мы видим, что автоморфизм тора имеет бесконечное число периодических траекторий, отвечающих разным  $q$ .

Групповые автоморфизмы и эндоморфизмы можно рассматривать для любых компактных сепарабельных абелевых групп. Для неабелевых групп изучение эргодических свойств автоморфизмов и эндоморфизмов часто сводится к изучению этих свойств для автоморфизмов и эндоморфизмов абелевых групп.

**4. Теорема Лиувилля.** Рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

у которой правые части принадлежат классу  $C^2$ . Мы можем определить поток  $\{T^t\}$ , где  $T^t x$  есть решение  $x(t)$  системы (3), для которого  $x(0) = x$ . Пусть  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  — неотрицательная интегрируемая функция. С помощью  $\rho$  можно построить меру  $d\mu_0 = \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ . Известная теорема Лиувилля утверждает, что если определить меру  $\mu_t$  равенством  $\mu_t(C) = \mu_0(T^{-t}C)$ , то  $\mu_t$  будет иметь плотность  $\rho_t(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \rho_t(x_1, \dots, x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\rho_t f_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение неразрывности. Из него видно, что  $\mu_0$  будет инвариантной мерой для потока  $\{T^t\}$ , если  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial (\rho f_i)}{\partial x_i} = 0$ . Иногда такая мера  $\mu_0$  называется мерой Лиувилля, а последнее уравнение — стационарным уравнением Лиувилля.

Часто оказывается, что плотность  $\rho$ , являющаяся решением стационарного уравнения Лиувилля, неинтегрируема, и поэтому ее невозможно нормировать. Ситуацию удастся ис-

править, если система (3) имеет первый интеграл  $I(x_1, \dots, x_n)$  класса  $C^2$ , т. е.  $\frac{dI}{dt} = \sum \frac{\partial I}{\partial x_i} f_i = 0$ , причем подмногообразия  $I = \text{const}$  компактны. Тогда если  $I_0 = I(x_1, \dots, x_n) = I(x)$ , то  $I(T'x) = I_0$ , т. е. вся траектория точки  $x$  принадлежит компактному подмногообразию  $I = I_0$ .

**Теорема.** Если  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  — неотрицательная функция, являющаяся решением стационарного уравнения Лиувилля, то мера  $\nu_0$ , сосредоточенная на подмногообразии  $\Gamma_{I_0} = \{x \mid I(x) = I_0\}$ , для которой  $d\nu_0 = \frac{d\sigma}{|\text{grad } I|}$ , где  $d\sigma$  — мера на  $\Gamma_{I_0}$ , порожденная индуцированной метрикой в пространстве  $R^n$ , будет инвариантной мерой потока  $\{T^t\}$ .

Меру  $\nu_0$  уже можно во многих случаях нормировать. Доказательство теоремы имеется во многих учебниках анализа, и поэтому мы его здесь не приводим.

**5. Гамильтоновы системы.** Частный, но важный случай предыдущей ситуации возникает в классической механике. Допустим, что задано  $2m$ -мерное симплектическое многообразие  $M_0$  класса  $C^2$ , в окрестности  $U \in M_0$  выбраны локальные координаты  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  и симплектическая структура задается дифференциальной формой  $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ .

Гамильтоновой системой на  $M_0$  называется система дифференциальных уравнений на  $M_0$ , порождаемая функцией  $H(q, p)$  класса  $C^2$  и имеющая вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4)$$

Функция  $H$  называется функцией Гамильтона, а сама система (4) называется гамильтоновой. Из (4) видно, что  $\rho(q, p) \equiv 1$  удовлетворяет уравнению Лиувилля и  $H(q, p)$  служит первым интегралом системы. Если подмногообразия  $H(q, p) = \text{const}$  компактны, то возникающая на таких подмногообразиях инвариантная мера будет уже конечной. Она называется в статистической механике микроканоническим распределением.

**6. Геодезические потоки.** Пусть  $Q$  — компактное замкнутое риманово  $m$ -мерное многообразие класса  $C^2$  и  $M_0$  — кокасательное расслоение над  $Q$ . Каждая точка  $x \in M_0$  представляет собой кокасательный вектор к  $Q$  в некоторой точке  $q \in Q$ . Совокупность  $\mathcal{T}_q$  кокасательных векторов, касающихся  $Q$  в точке  $q$ , есть кокасательная плоскость к  $Q$  в этой точке. Риманова структура на  $Q$  позволяет ввести в  $\mathcal{T}_q$  скалярное

произведение  $(\cdot)$  и отождествить касательное и кокасательное расслоения.  $M_0$  каноническим образом наделяется симплектической структурой. Возьмем в качестве функции Гамильтона функцию  $H=(x, x)$ . Многообразие постоянной энергии  $H=1$  есть пучок  $M$  единичных касательных векторов к  $Q$ . Динамика, отвечающая гамильтоновой системе (4), имеет в данном случае простой геометрический смысл. А именно, единичный касательный вектор  $x \in M$  однозначно определяет направленную геодезическую. Тогда  $T^t x$  есть вектор, получающийся параллельным переносом вектора  $x$  на расстояние  $t$  вдоль геодезической, определяемой  $x$ . Так определенный поток  $\{T^t\}$  называется геодезическим потоком на  $Q$ . Микроканоническое распределение  $\nu$  также описывается в геометрических терминах. А именно, обозначим через  $\sigma$  меру на  $Q$ , индуцированную римановой метрикой, и через  $d\omega_q$  — равномерную меру Лебега на  $(m-1)$ -мерной сфере единичных касательных векторов  $S_q^{(m-1)} \subset T_q$ . Тогда для любой измеримой функции  $f$  на  $M$

$$\int f d\nu = \int_Q d\sigma(q) \int_{S_q^{(m-1)}} f(x) d\omega_q(x).$$

**7. Преобразование сдвига и стационарные случайные последовательности теории вероятностей.** Пусть  $(X, \mathcal{X})$  — измеримое пространство и  $(M, \mathcal{M})$  — измеримое пространство бесконечных последовательностей  $x = \{x_i\}$ , где  $x_i \in X$ ,  $-\infty < i < \infty$ . Напомним, что  $\mathcal{M}$  есть наименьшая  $\sigma$ -алгебра, порожденная всевозможными конечномерными цилиндрами  $C_{i_1, \dots, i_m} = \{x | x_{i_k} \in C_k\}$ ,  $C_k \in \mathcal{X}$ , где  $(i_1, \dots, i_m)$  — произвольный конечный набор целых чисел. Преобразование сдвига  $Sx = x'$ , где  $x'_i = x_{i+1}$ , есть автоморфизм измеримого пространства  $(M, \mathcal{M})$ . Инвариантность меры  $\mu$  относительно  $S$  означает, что для любого набора множеств  $C_1, C_2, \dots, C_m$  выполнено равенство  $\mu(C_{i_1, \dots, i_m}) = \mu(C_{i_1+1, \dots, i_m+1})$ .

Отдельная координата  $x_i$  есть, очевидно, измеримая функция на  $(M, \mathcal{M})$  и по терминологии теории вероятностей представляет собой случайную величину. Инвариантность меры  $\mu$  относительно сдвига означает, что совместное распределение случайных величин  $x_{i_1+r}, x_{i_2+r}, \dots, x_{i_m+r}$  не зависит от  $r$ . Последовательности случайных величин  $\{x_i\}$  с таким свойством называются в теории вероятностей стационарными случайными последовательностями.

Пусть  $T$  — произвольный автоморфизм пространства с мерой  $(M_0, \mathcal{M}_0, \mu_0)$ . Возьмем конечное разбиение  $\alpha = (C_1, \dots, C_r)$  пространства  $M_0$  и образуем конечное измеримое пространство  $X = (1, 2, \dots, r)$  из  $r$  чисел. Для любого  $y \in M_0$  имеем бесконечную последовательность включений  $T^n y \in C_{i_n}$ ,

$-\infty < n < \infty$ . Тогда точка  $y$  порождает бесконечную последовательность  $x = \{x_i\}$ , являющуюся точкой пространства последовательностей  $M$ . При этом точке  $Ty$  сопоставляется сдвинутая последовательность  $Sx$ . Иными словами, если обозначить через  $\varphi_\alpha$  отображение  $M_0 \rightarrow M$ , где  $\varphi_\alpha(y) = x$ , то  $\varphi_\alpha T = S\varphi_\alpha$ . Положим для любого цилиндра  $C_{i_1, \dots, i_m}$

$$\mu(C_{i_1, \dots, i_m}) = \mu_0 \{y \mid T^{-i_1}y \in C_{i_1}, \dots, T^{-i_m}y \in C_{i_m}\}.$$

Эта формула задает меру  $\mu$  в пространстве  $M$ . Перестановочность  $\varphi_\alpha$  со сдвигом  $S$  означает, что мера  $\mu$  задает стационарную случайную последовательность. Таким образом, всякому преобразованию с инвариантной мерой отвечают стационарные случайные последовательности, получающиеся при различных  $\alpha$ . Разумеется, в предыдущих построениях можно было бы рассматривать счетные и непрерывные разбиения  $\alpha$ .

Описанная выше конструкция важна с разных точек зрения. Переход к разбиению  $\alpha$  означает, что мы задаем положение точки в фазовом пространстве не точно, а лишь приближенно, с точностью, определяемой разбиением  $\alpha$ . Тогда случайность, заложенная в выборе начальной точки  $y$  и измеряемая инвариантной мерой  $\mu$ , переходит в случайность закодированной последовательности  $x$ . Тем самым чисто детерминированная динамика может порождать чисто случайные процессы. В дальнейшем это будет видно более непосредственно на целом ряде конкретных примеров. По существу, одна из основных задач эргодической теории может быть сформулирована как задача описания и исследования случайных последовательностей, возникающих при разном выборе  $\alpha$ .

Пусть  $(M, \mathcal{M})$  — пространство бесконечных последовательностей  $x = \{x_i\}$ , где  $x_i \in X$ ,  $-\infty < i < \infty$ , и  $X$  — есть измеримое пространство,  $S$  — преобразование сдвига в  $M$ .

**Определение 7.** Сдвиг  $S$  называется сдвигом Бернулли или автоморфизмом Бернулли, если мера  $\mu$  есть прямое произведение бесконечного числа мер, совпадающих с фиксированной мерой  $\nu$  на  $X$ . Иными словами, для любого цилиндра  $C_{i_1, \dots, i_m}$  его мера  $\mu(C_{i_1, \dots, i_m}) = \nu(C_{i_1}) \dots \nu(C_{i_m})$ .

**Определение 8.** Сдвиг  $T$  называется автоморфизмом Маркова, если мера  $\mu$  в  $M$  есть стационарная мера Маркова с фазовым пространством  $X$ .

Поскольку в дальнейшем мы, как правило, будем предполагать инвариантную меру известной, остановимся кратко на проблеме ее существования. Пусть  $M$  — компактное полное метрическое пространство и  $T$  — непрерывное отображение  $M$  в себя. Для произвольной начальной меры  $\nu_0$  построим меры  $\nu_n$ , где  $\nu_n(C) = \nu_0(T^{-n}C)$ , и их средние арифметические

$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k$ . Поскольку пространство вероятностных мер на  $M$  слабо компактно, то из последовательности  $\mu_n$  можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность  $\mu_{n_i} \Rightarrow \mu$ . Покажем, что  $\mu$  — инвариантная мера для  $T$ . Достаточно установить, что для любой непрерывной функции  $f$

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(Tx) d\mu(x). \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int f(Tx) d\mu(x) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \int f(Tx) d\nu_k(x) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \int f(x) d\nu_{k+1}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=2}^{n_i+1} \int f(x) d\nu_k(x) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \int f(x) d\mu_{n_i}(x) + \frac{1}{n_i} \int f(x) d\nu_{n_i+1}(x) - \frac{1}{n_i} \int f(x) d\nu_0(x) \right] = \\ &= \int f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\int f(Tx) d\nu_k(x) = \int f(x) d\nu_{k+1}(x)$ . Это равенство для индикаторов вытекает из определения мер  $\nu_k$  и с помощью линейности меры и непрерывности продолжается на все непрерывные функции. Метод, который только что был продемонстрирован, появился впервые в работе Боголюбова — Крылова [4]. Он часто используется в теории цепей Маркова, статистической механике и др.

Как мы видим, в гамильтоновых системах существование инвариантной меры часто вытекает из теоремы Лиувилля.

В так называемых системах с диссипацией, где  $\operatorname{div} f = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$  (см. (3)), вообще говоря, может не быть инвариантной меры, задаваемой плотностью по мере Лебега, поскольку  $\operatorname{div} f$  характеризует уменьшение меры Лебега любого множества под действием динамики. В таких системах иногда бывает так, что сама динамика «вырабатывает» естественную инвариантную меру. Предположим, что для потока  $\{T^t\}$ , определяемого системой (3), имеется компактная область  $O$  с гладкой границей  $\partial O$  и на  $\partial O$  векторное поле  $f = (f_1, \dots, f_n)$  направлено внутрь  $O$ . Тогда  $T^t O \subset O$  при всех  $t > 0$ . Образует пересечение  $A = \bigcap T^t O$ . Часто такое пересечение называется аттрактором. Пусть  $d\nu_0(x) = \rho_0(x) dx$  — произвольная абсолютно непрерывная мера, сосредоточенная в  $O$ . Тогда мера  $\nu_t$ , где  $\nu_t(C) = \nu_0(T^{-t}C)$ , сосредоточена в области  $T^t O$ . Если существует слабый предел  $\mu$  мер  $\nu_t$  при  $t \rightarrow \infty$ , то этот предел будет

инвариантной мерой, поскольку для любой непрерывной функции  $f$ , сосредоточенной в  $O$ ,

$$\int f(T^s x) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int f(T^s x) dv_t(x) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \int f(x) dv_{t+s}(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

Ясно, что  $\mu$  сосредоточена на аттракторе  $A$ . Особенно важны случаи, когда  $\mu$  не зависит от выбора начальной меры  $\nu_0$ . Тогда ее естественно принять за ту инвариантную меру, которая вырабатывается динамикой.

Первым и очень важным следствием инвариантности меры является так называемая эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина. Мы приведем ее в подробной формулировке.

**Эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина.** Пусть  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  — пространство с мерой,  $f \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Для  $\mu$ -почти каждой точки  $x$  и  $f \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ :

1) в случае эндоморфизма  $T$  существует предел

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(T^k x);$$

2) в случае полупотока  $\{T^t\}$  существует предел

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T^t x) dt;$$

3) в случае автоморфизма  $T$  существуют и равны пределы

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(T^k x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(T^{-k} x) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f(T^k x);$$

4) в случае потока  $\{T^t\}$  существуют и равны пределы

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T^t x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T^{-t} x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(T^t x) dt.$$

При этом  $\bar{f}(x) = \bar{f}(T^t x)$  для любого допустимого  $x$  и  $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu$ .

Функция  $\bar{f}$  называется средним по времени или средним вдоль траектории. Таким образом, эргодическая теорема



Биркгофа—Хинчина утверждает существование временных средних.

Доказательство этой теоремы приводиться здесь не будет. Имеется много ее обобщений, из которых мы приведем формулировку так называемой субаддитивной эргодической теоремы Кингмана, представляющей собой важное усиление эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина. Остановимся на

случае эндоморфизмов. Суммы  $\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = g_n(x)$  удовлетворяют соотношению:  $g_{n+m}(x) = g_n(x) + g_m(T^n x)$ . Рассмотрим теперь произвольную последовательность  $\{g_n(x)\}$  вещественных измеримых функций на  $M$ , которые вместо последнего равенства удовлетворяют неравенству  $g_{m+n}(x) \leq g_n(x) + g_m(T^n x)$  почти всюду. Для таких последовательностей справедлива

Субаддитивная эргодическая теорема Кингмана (см. [5]). Пусть  $g_n: M \rightarrow R^1 \cup \{-\infty\}$ ,  $g_1^+ \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ , где  $g_1^+(x) = \max\{0, g_1(x)\}$ . Тогда существует такая инвариантная относительно  $T$  функция  $\bar{g}: M \rightarrow R^1 \cup (-\infty)$ ,  $\bar{g}^+ \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} g_n(x) = \bar{g}(x)$  для почти всех  $x$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_M g_n d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int_M g_n d\mu = \int_M \bar{g} d\mu.$$

Обратимся теперь к другому следствию существования инвариантной меры—так называемой теореме Пуанкаре о возвращении. Пусть  $T$ —эндоморфизм пространства  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Возьмем  $C \in \mathcal{M}$ , для которого  $\mu(C) > 0$ .

Теорема Пуанкаре о возвращении. Для почти каждой точки  $x \in C$  существует бесконечная последовательность  $\{k_i\}$  такая, что  $T^{k_i} x \in C$ .

Доказательство. Обозначим через  $C_s$  множество точек  $x \in C$  таких, что  $T^k x \notin C$  для всех  $k \geq s$ . Мы покажем, что  $\mu(C_s) = 0$  для любого  $s \geq 1$ . Сначала заметим, что  $C_s \cap T^{-m} C_s = \emptyset$  для всех  $m \geq s$ . В самом деле, если  $x \in C_s \cap T^{-m} C_s$ , то  $T^m x \in C_s \subseteq C$ , что противоречит определению  $C_s$ . Более того,  $T^{-n} C_s \cap T^{-m} C_s = \emptyset$ , если  $n - m \geq s$ . Действительно, если  $x \in T^{-n} C_s \cap T^{-m} C_s$ , то  $T^m x \in C_s \cap T^{n-m} C_s$ , вопреки предыдущему утверждению. Таким образом, множества  $T^{-ps} C_s$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , попарно не пересекаются и имеют одинаковую меру. Следовательно,  $\mu(C_s) = 0$ . Теорема доказана.

С теоремой Пуанкаре о возвращении связан так называемый парадокс Цермело в статистической механике. Возьмем какой-либо ограниченный замкнутый объем  $V$  и рассмотрим

гамильтонову систему  $N$  одинаковых частиц, заключенных в этом объеме и взаимодействующих между собой посредством сил парного взаимодействия с потенциалом  $U(r)$ . Функция Гамильтона для этой системы имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{(i,j)} U(|q_i - q_j|).$$

На границе объема  $V$  зададим условия упругого отражения. Тогда на многообразии постоянной энергии возникает микрореканоническое распределение, инвариантное относительно динамики.

Допустим теперь, что в начальный момент все частицы занимают только половину объема  $V$ . По теореме Пуанкаре о возвращении должны наступить такие моменты времени, когда вся система частиц снова соберется в той же половине объема, т. е. если эта система частиц находится в газовой фазе, то весь газ должен скопиться только в части объема. Такое событие невозможно себе представить, и, разумеется, до сих пор оно не наблюдалось. Частичное разрешение этого парадокса связано с большим числом степеней свободы всей системы. Если предположить, что  $V$  имеет объем  $1 \text{ см}^3$ , а газ содержится при нормальных условиях, то в  $V$  имеется примерно  $6 \cdot 10^{20}$  частиц. Вероятность того, что газ занимает половину объема, не превосходит  $\rho^{10^{23}}$  при некотором  $\rho < 1$ . Тогда время возвращения Пуанкаре имеет порядок величины, обратной к вероятности, т. е.  $\rho^{-10^{23}}$ . Наблюдать систему в течение такого времени невозможно, и поэтому циклы Пуанкаре не реализуются. Если же моделировать на ЭВМ движение системы небольшого (порядка 10) числа частиц, то вероятность того, что все частицы соберутся в половине объема, не так уж мала, и это событие можно наблюдать.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Имеется целый ряд книг, посвященных эргодической теории, и мы перечислим здесь только некоторые из них.

[1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1981.

[2] Walters P. An Introduction to Ergodic Theory.— Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[3] Mañé R. Ergodic Theory and Differential Dynamics.— Berlin: Springer-Verlag, 1987.

2° Следующие ссылки относятся к содержанию этой лекции.

[4] Bogoljubov N., Krylov N. La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire // Ann. Math.—1937.—V. 38.—P. 65—113.

[5] C. Kingman J. F. Subadditive Ergodic Theory // Ann. Prob.—1973.—V. 1.—P. 889—909.

## ЛЕКЦИЯ 2

### ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА И ИЗМЕРИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ. ЭРГОДИЧНОСТЬ И РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЭРГОДИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ, ПЕРЕМЕШИВАНИЕ. СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ПЕРЕКЛАДЫВАНИЯ ОТРЕЗКОВ

Эргодическая теория, основанная на теории меры, становится более содержательной, если на пространство с мерой наложить ряд общих ограничений, которые заведомо выполнены во всех основных приложениях. Пусть  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  — пространство с вероятностной мерой, не имеющей атомов, т. е. точек положительной меры.

**Определение 1.**  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  называется *пространством Лебега*, если  $M$  изоморфно  $\text{mod } 0$  отрезку  $[0, 1]$  с обычной мерой Лебега  $l$ .

Изоморфизм  $\text{mod } 0$  означает, что найдется подмножество  $M' \subset M$ ,  $\mu(M') = 1$ , и подмножество  $C' \subset [0, 1]$ ,  $l(C') = 1$ , между которыми можно установить взаимно-однозначное и взаимно-измеримое сохраняющее меру соответствие. Любое полное сепарабельное метрическое пространство с борелевской  $\sigma$ -алгеброй измеримых подмножеств является пространством Лебега. Одним из центральных понятий теории пространств Лебега является понятие измеримого разбиения. Пусть  $\xi$  — какое угодно разбиение пространства Лебега  $M$ , т. е. представление  $M$  в виде объединения непересекающихся множеств  $C_\xi$ , называемых элементами разбиения  $\xi$ . Элемент разбиения, содержащий точку  $x \in M$ , обозначается  $C_\xi(x)$ . Через  $\mathcal{M}(\xi) \subset \mathcal{M}$  обозначим  $\sigma$ -подалгебру подмножеств  $A \in \mathcal{M}$ , состоящих  $\text{mod } 0$  из элементов разбиения  $\xi$ . Это означает, что для любого  $A \in \mathcal{M}(\xi)$  найдется  $A' \in \mathcal{M}$ ,  $\mu(A' \Delta A) = 0$ , и  $A'$  есть объединение некоторых  $C_\xi$  ( $\Delta$  — симметрическая разность). Через  $(M|\xi, \mathcal{M}(\xi), \mu)$  обозначим пространство с вероятностной мерой, точками которого служат элементы  $C_\xi$  разбиения  $\xi$ ,  $\sigma$ -алгеброй измеримых подмножеств служит  $\mathcal{M}(\xi)$ , а  $\mu$  здесь обозначает ограничение исходной меры  $\mu$  на  $\sigma$ -подалгебру  $\mathcal{M}(\xi)$ .

**Определение 2.** Разбиение  $\xi$  называется *измеримым*, если найдется  $M' \subset M$ ,  $\mu(M') = 1$ , состоящее из элементов разбиения  $\xi$ , и на каждом  $C_\xi \in M'$  можно задать меру  $\mu(\cdot | C_\xi)$ , определенную на  $\sigma$ -алгебре множеств вида  $A \cap C_\xi$ ,  $A \in \mathcal{M}$ , и такую, что для любого  $B \in \mathcal{M}$

1)  $\mu(B | C_\xi)$  есть измеримая функция относительно  $\sigma$ -подалгебры  $\mathcal{M}(\xi)$ ;

2) выполняется формула полной вероятности

$$\mu(B) = \int_{M|\xi} \mu(B|C_\xi) d\mu(C_\xi).$$

Мера  $\mu(\cdot|C_\xi)$  называется условной мерой, определенной на элементе  $C_\xi$ .

Для любой измеримой интегрируемой функции  $f$  имеет место формула полного математического ожидания

$$\int_M f(x) d\mu(x) = \int_{M|\xi} d\mu(C_\xi) \int_{C_\xi} f(y) d\mu(y|C_\xi).$$

Измеримые разбиения возникают во многих вопросах эргодической теории. Для нас существенна связь, которая существует в пространствах Лебега между измеримыми разбиениями и  $\sigma$ -подалгебрами  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{M}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  — пространство Лебега,  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$  — некоторая  $\sigma$ -подалгебра. Тогда существует такое измеримое разбиение  $\xi$ , что  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\xi)$ . Это разбиение единственно mod 0, т. е. если  $\mathcal{M}(\xi_1) = \mathcal{M}(\xi_2)$ , то  $\xi_1 = \xi_2$  на некотором подмножестве  $M' \subset M$ ,  $\mu(M') = 1$ .

В силу соответствия между  $\sigma$ -подалгебрами и измеримыми разбиениями все операции над  $\sigma$ -подалгебрами можно определить как операции над измеримыми разбиениями. В частности, пусть  $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\xi_\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , — произвольное семейство  $\sigma$ -подалгебр. Обозначим  $\overline{\mathcal{M}}$  (соответственно  $\underline{\mathcal{M}}$ ) наименьшую (соответственно наибольшую)  $\sigma$ -подалгебру, содержащую все  $\mathcal{M}_\alpha$  (соответственно содержащуюся во всех  $\mathcal{M}_\alpha$ ).

**Определение 3.** Произведением разбиений  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , называется такое разбиение  $\bar{\xi}$ , что  $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\bar{\xi})$ . Пересечением разбиений  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , называется такое разбиение  $\underline{\xi}$ , что  $\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\underline{\xi})$ .

Произведения и пересечения обозначаются соответственно

$$\bar{\xi} = \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} \xi_\alpha, \quad \underline{\xi} = \bigwedge_{\alpha \in \mathcal{A}} \xi_\alpha.$$

Геометрически операция произведения разбиений намного проще операции пересечения. Если  $\mathcal{A}$  конечно или счетно, то

$$C_{\bar{\xi}}(x) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_{\xi_\alpha}(x).$$

Некоторый аналог этой формулы справедлив и для несчетных семейств  $\{\xi_\alpha\}$ . Пересечение может быть сложной операцией уже в случае двух разбиений и потребовать для своего геометрического построения даже трансфинитной индукции.

Пусть  $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$ . Для получения  $C_\xi(x)$  надо взять  $C_{\xi_{\alpha_1}}(x)$ , через почти каждую по отношению к условной мере на  $C_{\xi_{\alpha_1}}$  точку  $y \in C_{\xi_{\alpha_1}}$  провести  $C_{\xi_{\alpha_2}}(y)$ , через почти каждую точку  $z$  (по надлежащей мере) полученного множества провести снова  $C_{\xi_{\alpha_1}}(z)$  и т. д. Нетрудно привести примеры, когда этот процесс действительно требует бесконечного числа шагов. Мы будем писать  $\xi_1 \geq \xi_2 \pmod{0}$ , или просто  $\xi_1 \geq \xi_2$ , если  $\mathcal{M}(\xi_1) \supseteq \mathcal{M}(\xi_2)$ . Геометрически это означает, что почти каждый  $C_{\xi_2}$  состоит mod 0 из элементов  $C_{\xi_1}$ .

Вернемся к динамическим системам. Пусть  $\{T^t\}$  — однопараметрическая группа или полугруппа сохраняющих меру преобразований пространства Лебега  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

**Определение 4.** Множество  $A \in \mathcal{M}$  называется инвариантным mod 0 относительно динамической системы  $\{T^t\}$ , если  $\mu(A \Delta T^{-t}A) = 0$  для любого  $t$ .

Инвариантные mod 0 множества образуют  $\sigma$ -подалгебру, которую мы обозначим  $\mathcal{M}^{(inv)}$ . В формулировке эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина (см. предыдущую лекцию) предельные функции  $\bar{f}$  измеримы относительно  $\mathcal{M}^{(inv)}$ . В силу соответствия между  $\sigma$ -подалгебрами и измеримыми разбиениями  $\mathcal{M}^{(inv)} = \mathcal{M}(\xi)$ . Это разбиение  $\xi$  называется неподвижным разбиением (по отношению к динамической системе  $\{T^t\}$ ). Мы будем его обозначать  $\xi^{(inv)}$ .

В случае дискретного времени  $t$  нетрудно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** Если  $A$  инвариантно mod 0, то существует такое инвариантное  $A_1$ , т. е.  $A_1 = T^{-t}A_1$  при всех  $t$ , что  $\mu(A \Delta A_1) = 0$ .

В случае непрерывного времени для получения аналогичного результата иногда приходится менять на множестве меры 0 саму динамическую систему. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2** (фон Нейман [3], Рохлин [4]). В пространстве Лебега  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  можно найти  $\tilde{M} \subset M$ ,  $\mu(\tilde{M}) = 1$ , и можно изменить динамическую систему на множестве меры 0, т. е. найти  $\{\tilde{T}^t\}$  такие, что для любого  $t$  справедливо  $\tilde{T}^t x = T^t x$  для почти всех  $x$ . При этом  $\sigma$ -подалгебры инвариантных mod 0 множеств у  $\{T^t\}$  и  $\{\tilde{T}^t\}$  совпадают, а соответствующие разбиения  $\xi^{(inv)}$ ,  $\tilde{\xi}^{(inv)}$  совпадают mod 0. Каждый элемент  $C_{\xi^{(inv)}}$  инвариантен относительно  $\{\tilde{T}^t\}$ , т. е.  $\tilde{T}^t C_{\xi^{(inv)}} = C_{\xi^{(inv)}}$ , и  $\{\tilde{T}^t\}$  сохраняет условную меру  $\mu\{\cdot | C_{\xi^{(inv)}}\}$ .

Чуть позже мы объясним, что  $\xi^{(inv)}$  является наибольшим из измеримых разбиений, обладающих перечисленными свойствами.

Центральным понятием эргодической теории является понятие эргодичности.

**Определение 5.** Динамическая система  $\{T^t\}$  называется эргодической, если всякое инвариантное mod 0 множество имеет меру 0 или 1.

Эквивалентные формулировки эргодичности:

A)  $\mathcal{M}^{(\text{inv})} = \mathcal{N}$ , где  $\mathcal{N}$  — тривиальная  $\sigma$ -подалгебра множеств меры 0, 1.

B)  $\xi^{(\text{inv})} = v \pmod{0}$ , где  $v$  — тривиальное разбиение, единственным элементом которого является  $M$ .

C) В эргодической теореме Биркгофа — Хинчина предельная функция  $\bar{f} = \int f(x) d\mu(x)$ . В самом деле,  $\bar{f}$  измерима относительно  $\mathcal{M}^{(\text{inv})}$ . Если  $\mathcal{M}^{(\text{inv})} = \mathcal{N}$ , то  $\bar{f} = \text{const}$  почти всюду. Эта константа должна равняться математическому ожиданию, поскольку  $\int \bar{f}(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$ . В другую сторону эквивалентность также легко доказывается. Ввиду C) эргодичность часто формулируется как совпадение временных средних с пространственными.

D) Всякая инвариантная mod 0 функция  $f$ , т. е.  $f(T^t x) = f(x)$  п. в. для любого  $t$ , есть константа п. в.

Понятие эргодичности было введено Больцманом в связи с основаниями статистической механики. В дальнейшем было понято, что его роль для статистической механики не столь значительна, поскольку там важнее, что для систем статистической механики в процессах динамики участвует огромное число отдельных молекул, атомов и т. п. и именно этот большой параметр является определяющим. С другой стороны, для многих динамических систем с фазовыми пространствами небольшой размерности часто бывает важно знать, при каких условиях они эргодичны. В настоящее время это удастся выяснить для отдельных классов динамических систем. По существу, вокруг этой проблемы и концентрируется содержание всей книги.

**Пример 1.** Пусть  $T: \text{Tor}^2 \rightarrow \text{Tor}^2$  — групповой автоморфизм тора (см. пример 3 предыдущей лекции), задаваемый

целочисленной матрицей  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\det A = \pm 1$ .

**Теорема 3.** Автоморфизм  $T$  эргодичен тогда и только тогда, когда матрица  $A$  не имеет собственных значений, по модулю равных 1.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественные собственные значения матрицы  $A^*$ , причем  $|\lambda_1| > 1$ ,  $\lambda_2 = \det A / \lambda_1$ ,  $|\lambda_2| < 1$ ,  $e_1 = (e_{11}, e_{12})$  и  $e_2 = (e_{21}, e_{22})$  — соответствующие нормированные собственные векторы. Из вида собственных

значений следует, что компоненты этих векторов рационально независимы. Следовательно, любой ненулевой вектор  $n=(n_1, n_2)$  с целочисленными компонентами имеет вид  $n=c_1(n)e_1+c_2(n)e_2$ , где обе координаты  $c_1(n)$  и  $c_2(n)$  отличны от нуля, и траектория любого такого вектора  $(A^*)^m n = \lambda_1^m c_1(n)e_1 + \lambda_2^m c_2(n)e_2$ ,  $m \in \mathbb{Z}^1$ , бесконечна.

Предположим, что  $T$  неэргодичен. Тогда существует инвариантная mod 0 функция  $f(x, y) \neq \text{const}$  из  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Пусть  $f(x, y) = \sum_{\tilde{n}=(n_1, n_2)} c_n e^{2\pi i(n_1 x + n_2 y)}$  — разложение ее в ряд

Фурье, причем хотя бы для одного  $n \neq 0$  коэффициент  $c_n$  отличен от нуля. Из инвариантности  $f(x, y)$  и единственности разложения в ряд Фурье следует, что  $c_n = c_{(A^*)^m n}$ . Так как множество  $(A^*)^m n$  бесконечно, функция  $f(x, y)$  не может принадлежать  $L^2$ . Тем самым наше предположение неверно. Допустим теперь, что  $|\lambda_1|=1$ . Тогда  $|\lambda_2|=1$ . Аналогичные рассуждения показывают, что траектория любого целочисленного вектора  $n$  содержит векторы, ограниченные по норме, и, следовательно, траектория  $\{(A^*)^m n\}$  состоит из конечного числа векторов. Тогда функция  $f(x, y) = \sum_{(A^*)^m n} e^{2\pi i(n_1 x + n_2 y)}$ , где

$n \neq 0$ , инвариантна и отлична от постоянной. Теорема доказана.

**Теорема 2' (усиление теоремы 2).** Пусть  $\xi^{(\text{inv})}$  — измеримое разбиение из теоремы 2. Ограничение  $\{\tilde{T}^t\}$  на каждый элемент  $C_{\xi^{(\text{inv})}}$  эргодично.

Теоремы 2, 2' дают разложение произвольной динамической системы на эргодические компоненты.

Пусть в фазовом пространстве  $(M, \mathcal{M})$  действует динамическая система  $\{T^t\}$ , сохраняющая одновременно меры  $\mu_1, \mu_2$ , причем  $\{T^t\}$  эргодична по отношению к каждой из них.

**Теорема 4.** Если  $\mu_1 \neq \mu_2$ , то меры  $\mu_1, \mu_2$  взаимно сингулярны.

**Доказательство.** В условиях теоремы найдется такая ограниченная измеримая функция  $f$ , что  $\int f d\mu_1 \neq \int f d\mu_2$ . В силу эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина для дискретного времени

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f(T^t x) \rightarrow \int f d\mu_1 \quad \text{для } \mu_1\text{-почти всех } x,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f(T^t x) \rightarrow \int f d\mu_2 \quad \text{для } \mu_2\text{-почти всех } x.$$

Очевидно, что возникающие подмножества полной меры не пересекаются. Аналогичное рассуждение справедливо в случае непрерывного времени. Теорема доказана.

**Определение 6.** Динамическая система  $\{T^t\}$  называется строго эргодической, если она имеет единственную инвариантную меру.

Пусть  $\{T^t\}$  — эргодическая динамическая система. Возьмем произвольную функцию  $f \geq 0$ , для которой  $\int f(x) d\mu(x) = 1$ . Тогда мы можем рассмотреть «неравновесную» меру  $\mu_0$ ,  $\frac{d\mu_0(x)}{d\mu(x)} = f(x)$ . Сдвиг этой меры определяется соотношением  $\mu_t(C) = \mu_0(T^{-t}C)$ . Последнее равенство эквивалентно, как легко видеть, тому, что  $\mu_t$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$  и  $\frac{d\mu_t(x)}{d\mu(x)} = f(T^t x)$ .

**Определение 7.** Динамическая система  $\{T^t\}$  называется перемешивающей, если  $\mu_t \rightarrow \mu$  при  $t \rightarrow \infty$  в том смысле, что для любой ограниченной измеримой функции  $h$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int h(x) d\mu_t(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int h(x) f_0(T^t x) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x).$$

Определение перемешивания допускает и другую эквивалентную формулировку.

**Определение 7.** Динамическая система  $\{T^t\}$  называется перемешивающей, если для любых  $f, h \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(T^t x) h(x) d\mu = \int f(x) d\mu(x) \int h(x) d\mu(x).$$

Скалярное произведение  $\int f(T^t x) h(x) d\mu(x)$  иногда называется временной корреляционной функцией. Во многих задачах важно не только устанавливать перемешивание, но и исследовать скорость сходимости к пределу временных корреляционных функций для естественных классов функций  $f, g$ .

Ясно, что перемешивание влечет эргодичность. В самом деле, если  $A \in \mathcal{M}^{(inv)}$ ,  $\chi_A$  — индикатор  $A$ , то, полагая  $f(x) = \chi_A(x)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int f(T^t x) h(x) d\mu(x) &= \int \chi_{T^{-t}A}(x) h(x) d\mu(x) = \\ &= \int \chi_A(x) h(x) d\mu(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu(A) \int h(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что  $\mu(A) = 1$ .

Введем теперь понятие спектра динамической системы. Пусть  $\{T^t\}$  динамическая система. Зададим оператор  $U^t$



в пространстве  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$  при помощи соотношения

$$(U^t f)(x) = f(T^t x).$$

Инвариантность меры  $\mu$  эквивалентна тому, что  $U^t$  — изометрический оператор, т. е.  $(U^t f_1, U^t f_2) = (f_1, f_2)$ . Операторы  $U^t$  образуют группу или полугруппу изометрических операторов (в зависимости от значений  $t$ ), сопряженную с исходной динамической системой  $\{T^t\}$ .

Свойства динамической системы, которые выражаются через свойства группы  $\{U^t\}$ , называются спектральными свойствами. Покажем, что эргодичность и перемешивание являются спектральными свойствами.

Введем подпространство  $H \subset L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ , состоящее из неподвижных элементов группы  $\{U^t\}$ , т. е.  $h \in H$  тогда и только тогда, когда  $U^t h = h$  для всех  $t$ . Ясно, что  $H$  содержит одномерное подпространство констант. Легко видеть, что система  $\{T^t\}$  эргодична тогда и только тогда, когда  $H$  одномерно. Перемешивание означает, что для любых  $f, g$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (U^t f, g) = (f, 1)(1, g).$$

Функция  $h \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$  называется собственной для  $\{U^t\}$ , если при всех  $t$

$$U^t h = c(t)h,$$

где  $|c(t)| = 1$ ,  $c(t_1 + t_2) = c(t_1)c(t_2)$ .

**Определение 8.** Динамическая система  $\{T^t\}$  называется слабо перемешивающей, если  $\{U^t\}$  не имеет собственных функций, кроме констант.

Из слабого перемешивания вытекает эргодичность. Далее мы будем обсуждать примеры эргодических динамических систем, не являющихся слабо перемешивающими (динамические системы с чисто точечным спектром). Из перемешивания вытекает слабое перемешивание. Действительно, если  $h$  — собственная функция, то при  $t \rightarrow \infty$

$$(U^t h, h) = c(t)(h, h) \rightarrow (h, 1)(1, h).$$

Если  $h$  не является константой, то  $h$  можно считать ортогональной константе. Поэтому правая часть равна 0. Следовательно,  $c(t) \rightarrow 0$ , что невозможно.

Предположим теперь, что  $t \in \mathbb{Z}^1$  или  $\mathbb{R}^1$ , т. е.  $\{U^t\}$  есть однопараметрическая группа изометрических операторов. Тогда операторы  $U^t$  обратимы, т. е.  $U^t$  являются унитарными операторами. Для однопараметрических групп унитарных

операторов хорошо известна теорема, описывающая структуру таких групп с точностью до унитарной эквивалентности. Приведем формулировку этой теоремы.

Вначале мы опишем соответствующие модели группы  $\{U^t\}$ . Пусть  $t \in \mathbb{Z}^1$ . На единичной окружности  $S^1$  рассмотрим последовательность ненормированных мер  $\sigma_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , и меру  $\sigma_\omega$ , причем все меры  $\sigma_\omega$ ,  $\sigma_k$  взаимно сингулярны (в смысле абсолютной непрерывности). Тогда можно найти такие попарно непересекающиеся подмножества  $\Lambda_k$ ,  $\Lambda_\omega$ , что  $\sigma_\omega(S^1 \setminus \Lambda_\omega) = 0$ ,  $\sigma_k(S^1 \setminus \Lambda_k) = 0$ . Иными словами, каждая мера  $\sigma_k$  сосредоточена на  $\Lambda_k$  и  $\sigma_\omega$  сосредоточена на  $\Lambda_\omega$ . Введем гильбертовы пространства  $H_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ ,  $(H_\omega)$ , где  $H_k$  состоит из функций  $f$ , обращающихся в нуль вне  $\Lambda_k$  ( $\Lambda_\omega$ ), со значениями в  $C^k(C^\infty)$ , причем

$$\int d\sigma_k(\lambda)(f(\lambda), f(\lambda)) < \infty,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — обычное скалярное произведение. Пусть  $H_0 = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k \oplus H_\omega$ . Зададим в  $H_0$  группу  $\{T^t\}$  унитарных операторов, действующих по формуле  $U_0^t f(\lambda) = e^{it\lambda} f(\lambda)$ ,  $f \in H_k$  или  $H_\omega$ .

**Теорема 5** (основная теорема о спектральной классификации групп  $\{U^t\}$ ). *Для любой группы унитарных операторов  $\{T^t\}$ ,  $t \in \mathbb{Z}^1$ , можно найти гильбертово пространство  $H_0$  и действующее в гильбертовом пространстве  $H$  унитарное отображение  $V: H \rightarrow H_0$  такие, что*

$$VU^t = U_0^t V, \quad t \in \mathbb{Z}^1.$$

*Если  $H'_0$ ,  $H''_0$  — два пространства, изоморфные при этом  $H$ , и  $\sigma'_k$ ,  $\sigma'_\omega$  и  $\sigma''_k$ ,  $\sigma''_\omega$  — соответствующие меры, то  $\sigma'_k \sim \sigma''_k$ ,  $\sigma'_\omega \sim \sigma''_\omega$  в смысле абсолютной непрерывности мер.*

Множества  $\Lambda_k$ ,  $\Lambda_\omega$  определяются группой  $\{U^t\}$  и могут быть выбраны независимо от изоморфизма  $V$ . Говорят, что на  $\Lambda_k$  группа  $\{U^t\}$  имеет однородный спектр кратности  $k$  (на  $\Lambda_\omega$  группа  $\{U^t\}$  имеет бесконечнократный спектр), а  $\sigma_k$  — спектральная мера кратности  $k$ . Если только одна из мер  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\omega$  отлична от нуля, то группа  $\{U^t\}$  имеет однородный спектр соответствующей кратности. Если все  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\omega$  абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, то говорят, что  $\{U^t\}$  имеет абсолютно непрерывный спектр. Если  $\sigma_k = 0$  при  $k=1, 2, \dots$ , а  $\sigma_\omega = l$  — мера Лебега, то говорят, что  $\{U^t\}$  имеет бесконечнократный лебеговский спектр. Этот тип спектра часто встречается в эргодической теории (см. часть II этой книги).

Для приложений полезен следующий критерий того, что  $\sigma_\omega = l$ .

**Критерий существования счетно-кратного лебеговского спектра.** Пусть существует такая бесконечная последовательность векторов  $h_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , что последовательность векторов  $U^t h_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ ,  $-\infty < t < \infty$ , образует ортонормальный базис. Тогда  $\sigma_k=0$ ,  $k=1, 2, \dots$ , и в качестве  $\sigma_\omega$  можно взять меру Лебега  $l$  на окружности.

Если  $U^t h_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ ,  $-\infty < t < \infty$ , образуют базис инвариантного подпространства  $H$ , то  $\Lambda_\omega \neq \emptyset$  и в качестве  $\sigma_\omega$  можно взять меру  $l'$ , для которой  $l \ll l'$ .

Доказательство этого критерия легко вытекает из теоремы 5, и мы его не приводим.

Приведенные определения и теорема 5 непосредственно переносятся на случай непрерывных групп, где  $t \in \mathbf{R}^1$ . Надо лишь считать, что  $\Lambda_k$ ,  $\Lambda_\omega$  — непересекающиеся подмножества прямой  $\mathbf{R}^1$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\omega$  — меры на этих подмножествах.

Сейчас мы введем один важный класс преобразований с инвариантной мерой и увидим интересный пример применения спектральной теории унитарных операторов. Пусть  $M = [0, 1]$ . Разобьем его на  $r$  отрезков  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ . Здесь и во многих случаях далее мы допускаем несущественную неточность, считая, что система отрезков задает разбиение, если  $\Delta_i \cap \Delta_j = \partial \Delta_i \cap \partial \Delta_j$ ,  $i \neq j$ , и  $\bigcup_{i=1}^r \Delta_i = [0, 1]$ . Зададим также какую-либо перестановку  $\pi$  из  $r$  элементов.

**Определение 9.** Перекладыванием отрезков называется преобразование  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , при котором  $\Delta'_i = T\Delta_i = \Delta_i + a_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , и новые отрезки  $\Delta'_i$  идут в порядке, определяемом перестановкой  $\pi$ .

Таким образом, перекладывание отрезков задается вектором  $l = (l_1, \dots, l_r)$ , где  $l_i$  — длина  $\Delta_i$ , и перестановкой  $\pi$ . Ясно, что  $T$  сохраняет меру Лебега  $\mu$ . Обозначим через  $\xi_0$  разбиение  $[0, 1]$  на отрезки  $\Delta_i$ . Тогда  $T\xi_0$  есть разбиение  $[0, 1]$  на отрезки  $T\Delta_i$ . Через  $\xi_n$  обозначим разбиение  $[0, 1]$  на отрезки  $\Delta_{i_0} \cap T\Delta_{i_1} \cap \dots \cap T^n \Delta_{i_n}$ . Тот факт, что элементы  $\xi_n$  являются отрезками, легко доказывается по индукции на основании того, что  $\xi_n \geq \xi_0$ .

**Определение 10.** Перекладывание  $T$  называется транзитивным, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max \mu(C_{\xi_n}) = 0$ .

Если  $T$  не является транзитивным, то найдутся такой отрезок  $\Delta^{(0)}$  и такое  $k$ , что  $T^k|_{\Delta^{(0)}}$  есть тождественное преобразование. Поэтому нетранзитивные перекладывания

естественно рассматривать как исключительные в пространстве всех перекладываний.

**Теорема 6.** Пусть  $T$  — транзитивное перекладывание  $g$  отрезков,  $\mu$  — любая непрерывная инвариантная относительно  $T$  мера, не обязательно являющаяся мерой Лебега. Тогда число эргодических компонент  $T$  не превосходит  $g$ .

**Доказательство.** Начнем с нескольких дополнительных фактов из спектральной теории унитарных операторов. Пусть  $H$  — конечномерное гильбертово пространство, в котором действует унитарный оператор  $U$ . Собственные значения  $U$  по модулю равны 1; подпространства, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны. Возьмем вектор  $h \in H$  и введем подпространство  $H(h)$ , порожденное векторами  $\dots, U^{-2}h, U^{-1}h, h, Uh, U^2h, \dots$ . Очевидно, что  $H(h) = UH(h) = U^{-1}H(h)$ .

Пространство  $H(h)$  можно получить и другим способом. Пусть  $h_i$  есть проекция  $h$  на подпространство, отвечающее собственному значению  $z_i$  оператора  $U$ . Тогда  $H(h)$  есть ни что иное, как линейная оболочка векторов  $h_i$ . Отсюда вытекает важное

**Следствие.** Пусть даны векторы  $h^{(1)}, \dots, h^{(n)}$  такие, что  $H = \sum_{l=1}^k H(h^{(l)})$ , хотя пространства  $H(h^{(l)})$  могут быть и не ортогональными. Тогда  $\dim H_i \leq k$  для любого  $i$ , где  $H_i$  — подпространство собственных векторов с собственным значением  $z_i$ .

**Доказательство.** Пусть  $h_i^{(l)}$  есть проекция  $h^{(l)}$  на  $H_i$ . По предположению  $\{h_i^{(l)}, l=1, 2, \dots, k\}$  порождает  $H_i$ . Следовательно,  $\dim H_i \leq k$ .

Проведенные рассуждения легко переносятся на бесконечномерный случай. Пусть  $H$  — бесконечномерное гильбертово пространство и  $U$  — унитарный оператор, действующий в  $H$ . Через  $H(h)$  обозначим замыкание линейной оболочки векторов  $U^n h, -\infty < n < \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть существует конечное множество векторов  $h^{(1)}, \dots, h^{(k)}$  таких, что  $\sum_{l=1}^k H(h^{(l)}) = H$ . Тогда для любого  $z \in S^1$  размерность подпространства собственных векторов, имеющих собственное значение  $z$ , не превосходит  $k$ .

Вернемся к перекладываниям. Рассмотрим вначале  $U^{-1}\chi_{\Delta_i} = \chi_{T\Delta_i}$ . Заметим теперь, что все  $\chi_{\Delta_{i_0} \cap T\Delta_{i_1}}$  представимы как линейные комбинации  $\chi_{\Delta_{i_0}}$  и  $U^{-1}\chi_{\Delta_{i_1}}$ . В самом деле, пусть последний  $\Delta_r$  содержит несколько интервалов  $T\Delta_{i_1}, \dots, T\Delta_{i_{k-1}}$  и

$$T\Delta_{i_1} \cup \dots \cup T\Delta_{i_{k-1}} \subset \Delta_r \subset T\Delta_{i_1} \cup \dots \cup T\Delta_{i_{k-1}} \cup T\Delta_{i_k}.$$

Тогда  $\Delta_r \cap T\Delta_i = T\Delta_i$ ,  $1 \leq s \leq k-1$ , и

$$\chi_{\Delta_r \cap T\Delta_k} = \chi_{\Delta_r} - \sum_{s=1}^{k-1} \chi_{T\Delta_{i_s}}.$$

Если  $T\Delta_k \subset \Delta_r \cup \Delta_{r-1}$ , то  $\chi_{\Delta_{r-1} \cap T\Delta_k} = \chi_{T\Delta_k} - \chi_{\Delta_r \cap T\Delta_k}$  и т. д. Рассуждая таким же образом и дальше, получим, что  $\chi_{\Delta_i \cap T\Delta_j}$  представима как линейная комбинация функций  $\chi_{\Delta_i}$ ,  $\chi_{T\Delta_i}$ , и  $\chi_{\Delta_{i_1} \cap \dots \cap T^p \Delta_{i_p}}$  представима как линейная комбинация функций  $\chi_{\Delta_{i_0}}$ ,  $\chi_{T\Delta_{i_1}}$ , ...,  $\chi_{T^p \Delta_{i_p}}$ . Но функции  $\chi_{\Delta_{i_1} \cap \dots \cap T^p \Delta_{i_p}}$  в силу транзитивности перекладывания  $T$  порождают все  $L^2([0, 1])$ .

Из леммы вытекает, что кратность каждого собственного значения оператора  $U$  не превосходит  $r$ . Допустим теперь, что можно построить  $k$  попарно непересекающихся инвариантных mod 0 множеств положительной меры  $A_1, \dots, A_k$ . Тогда их индикаторы являются ортогональными собственными функциями с собственным значением  $z=1$ . Поэтому  $k \leq r$ . Это утверждение эквивалентно утверждению теоремы.

*Следствие. Число различных эргодических мер перекладывания  $T$  не превосходит  $r$ .*

Действительно, если бы можно было найти  $p$  различных эргодических мер  $\mu_1, \dots, \mu_p$ ,  $p \geq r+1$ , то в силу попарной сингулярности этих мер (см. выше) можно было бы найти  $p$  непересекающихся подмножеств  $C_1, \dots, C_p$ , для которых  $\mu_i(C_i) = 1$ ,  $\mu_i(TC_i \Delta C_i) = 0$ . Тогда  $\mu = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mu_i$  имела бы  $p$  инвариантных mod 0 подмножеств положительной меры, что противоречит доказанной теореме.

Недавно, используя более глубокие методы, Вич [5] доказал, что число инвариантных мер транзитивного перекладывания не превосходит  $r/2$ . Каток (см. [1]) установил, что  $T$  никогда не обладает перемешиванием. С помощью весьма глубоких методов Вич [6] и Мазур [7] показали, что для почти всех в смысле меры Лебега векторов  $l$  полной меры и неприводимых перестановок  $\pi$  перекладывания  $T$  строго эргодичны. Упрощенное доказательство этого результата было получено Бошерницаном [8].

Перекладывания отрезков возникают во многих задачах эргодической теории. Любое преобразование отрезка  $[0, 1]$ , сохраняющее меру Лебега, можно аппроксимировать преобразованием типа перекладывания. Сейчас мы рассмотрим более конкретную ситуацию, где появляются перекладывания отрезков.

Пусть  $\Pi$  — многоугольник на плоскости с рациональными mod  $\pi$  углами  $\theta_1, \dots, \theta_s$ . Не ограничивая общности, можно

считать, что все  $\theta_i$  имеют вид  $\theta_i = \frac{q_i}{p} \pi$ , где  $q_i$  и  $p$  — целые числа.

Рассмотрим бильярд в  $\Pi$ , при котором каждая траектория представляет собой ломаную, отражающуюся от границ  $\Pi$  по закону «угол падения равен углу отражения». Тогда углы различных отрезков ломаной имеют вид  $\theta + \frac{k}{p} \pi$ , при некотором  $\theta \in \left[0, \frac{1}{p} \pi\right]$ . Зафиксировав  $\theta$ , мы получим инвариантное множество бильярда. Эргодические свойства бильярда на этом множестве сводятся к изучению эргодических свойств преобразования, действующего в пространстве отрезков, направленных под углами  $\theta + \frac{k}{p} \pi$ , и переводящего каждый отрезок в следующий отрезок вдоль траектории. Это преобразование можно реализовать как перекладывание отрезков. Интересные результаты, относящиеся к этим преобразованиям, были получены в работе Керчхофа, Мазура, Смайли [9] с помощью методов алгебраической геометрии.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Основные понятия спектральной теории динамических систем можно найти в книгах:

[1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1981.

[2] Динамические системы—2/Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: Изд-во ВИНТИ, 1985.

Теория измеримых разбиений изложена в работах [3] Neumann J. von. Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik // Ann. Math.—1932.—V. 33.—P. 587—642.

[4] Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры // Мат. сборник.—1949.—Т. 67, № 1.—С. 107—150.

Аксиоматика и подход Рохлина являются общепринятыми.

2° Приведем ряд последних работ по перекладываниям отрезков.

[5] Veech W. A. Interval Exchange Transformations // Ann. Math.—1978.—V. 33.—P. 222—278.

[6] Veech W. A. Gauss Measures for Transformations of the Space of Interval Exchange maps // Ann. Math.—1982.—V. 115, № 1.—P. 201—242.

[7] Masur H. Interval Exchange Transformations and Measured Foliations // Ann. Math.—1982.—V. 115, № 1.—P. 169—200.

[8] Boshernitzan M. Preprint.

[9] Kerckhoff S., Masur H., Smillie J. Ergodicity of Billiard Flows and Quadratic Differentials // Ann. Math.—1986.—V. 124.—P. 293—311.

3° Теорема 6 была доказана В. И. Оселедцом в работе

[10] Оселедец В. И. О спектре эргодических автоморфизмов // ДАН СССР.—1966.—Т. 168, № 5.—С. 1009—1011.

### ЛЕКЦИЯ 3

#### ИЗОМОРФИЗМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОБРАЗУЮЩИЕ РАЗБИЕНИЯ

Как уже было сказано ранее, в общей эргодической теории не делается никаких предположений типа гладкости для функций, задающих действие преобразований, входящих в динамическую систему. Формулируемое ниже понятие изоморфизма дает принципиальную возможность сравнивать динамические системы, заданные в пространствах разной размерности, с разной топологией и т. п.

Предположим, что имеются два эндоморфизма  $T'$  и  $T''$ , действующие в пространствах с мерой  $(M', \mathcal{M}', \mu')$  и  $(M'', \mathcal{M}'', \mu'')$  соответственно.

**Определение 1.** Эндоморфизмы  $T'$  и  $T''$  метрически изоморфны (короче, изоморфны), если существует изоморфизм  $\varphi \pmod{0}$  пространств  $(M', \mathcal{M}', \mu')$  и  $(M'', \mathcal{M}'', \mu'')$ , определенный на инвариантном относительно  $T'$  подмножестве  $\tilde{M}' \subset M'$   $\mu'$ -меры 1 и переводящий его в инвариантное относительно действия  $T''$  подмножество  $\tilde{M}'' \subset M''$   $\mu''$ -меры 1, такой, что

$$\varphi \circ T' = T'' \circ \varphi.$$

Инвариантность  $\tilde{M}'$ ,  $\tilde{M}''$  означает  $(T')^{-1} \tilde{M}' = \tilde{M}'$ ,  $(T'')^{-1} \tilde{M}'' = \tilde{M}''$ .

Если  $T'$ ,  $T''$  — автоморфизмы, то метрический изоморфизм  $T'$ ,  $T''$  означает, что пары  $(T', T'')$  и  $((T')^{-1}, (T'')^{-1})$  метрически изоморфны при помощи одного и того же изоморфизма  $\varphi$ .

**Определение 1.** Поток  $\{S_1^t\}$  на пространстве с мерой  $(M', \mathcal{M}', \mu')$  метрически изоморфен (короче, изоморфен) потоку  $\{S_2^t\}$  на пространстве с мерой  $(M'', \mathcal{M}'', \mu'')$ , если существует изоморфизм  $\varphi \pmod{0}$  этих пространств, заданный на инвариантном относительно потока  $\{S_1^t\}$  подмножестве  $\tilde{M}' \subset M'$   $\mu'$ -меры 1 и переводящий его в инвариантное относительно потока  $\{S_2^t\}$  подмножество  $\tilde{M}'' \subset M''$   $\mu''$ -меры 1, такой, что

$$\varphi S_1^t = S_2^t \varphi, \quad -\infty < t < \infty.$$

Аналогичное определение может быть дано в случае полупотоков. Все характеристики, свойства и т. п. динамических систем, одинаковые для изоморфных динамических систем, называются их метрическими инвариантами.

**Теорема 1.** Следующие свойства динамических систем являются метрическими инвариантами:

- 1) эргодичность;

2) слабое перемешивание;

3) перемешивание.

Если динамические системы изоморфны, то индуцируемые ими полугруппы (группы) изометрических (унитарных) операторов унитарно эквивалентны. Таким образом, спектр динамической системы есть также метрический инвариант.

Рассмотрим теперь два нетривиальных примера метрического изоморфизма автоморфизмов.

**Пример 1** (пример Мешалкина; см. [1]). Пусть  $M'$  есть пространство бесконечных в обе стороны последовательностей  $\omega' = \{\omega'_k\}$ ,  $\omega'_k \in X' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mu'$  — мера Бернулли, отвечающая распределению  $\pi' = \{1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/2\}$ ,  $T'$  — соответствующий сдвиг Бернулли. В качестве  $M''$  возьмем пространство бесконечных в обе стороны последовательностей  $\omega'' = \{\omega''_k\}$ ,  $\omega''_k \in X'' = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mu''$  — мера Бернулли, отвечающая распределению  $\pi'' = \{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$ ,  $T''$  — соответствующий сдвиг Бернулли.

**Теорема 2.** *Сдвиги Бернулли  $T'$  и  $T''$  метрически изоморфны.*

**Доказательство.** Построим явно соответствующий изоморфизм. Пусть дана типичная последовательность  $\omega' \in M'$ . Введем подмножества  $I'_r = I'_r(\omega') \subset \mathbb{Z}^1$ ,  $1 \leq r \leq 5$ , такие, что  $I'_r(\omega') = \{k \in \mathbb{Z}^1 | \omega'_k = r\}$ . Наша цель — построить последовательность  $\omega'' = \varphi(\omega')$ . Прежде всего положим  $\omega''_k = 1$  для  $k \in I'_1 \cup I'_2$ ,  $\omega''_k = 2$  для  $k \in I'_3 \cup I'_4$ . Для каждого  $k \in I'_5$  мы найдем такой номер  $k_1 = k_1(\omega') > k$ , что:

а<sub>1</sub>) число номеров  $i$ ,  $k \leq i \leq k_1$ , для которых  $\omega'_i = 5$ , равно числу номеров  $i$ , для которых  $\omega''_i \neq 5$ ;

а<sub>2</sub>)  $k_1$  — первый из номеров, удовлетворяющих а<sub>1</sub>).

Из теории одномерных случайных блужданий легко следует, что почти все  $\omega'$  таковы, что для каждого  $k \in I'_5(\omega')$  можно

найти соответствующее  $k_1$  и для каждого  $k_1 \in \bigcup_{1 \leq r \leq 4} I'_r(\omega')$

можно найти соответствующее  $k$ . Иными словами, соответствие  $k \leftrightarrow k_1$  взаимно-однозначно.

Положим теперь  $\omega''_k = 3$ , если  $\omega'_{k_1} = 1$  или 3, и  $\omega''_k = 4$ , если  $\omega'_{k_1} = 2$  или 4. Итак, для типичной последовательности  $\omega'$  мы определили весь набор значений  $\omega''_k$ ,  $\infty < k < \infty$  и, таким образом, построили целиком последовательность  $\omega''$ .

Положим  $\omega'' = \varphi(\omega')$ . По построению  $\varphi T' = T'' \varphi$ . Мы должны показать, что  $\varphi$  переводит меру  $\mu'$  в меру  $\mu''$ . Это нетрудно сделать, используя энтропийную теорию динамических систем (см. лекцию 6). Здесь мы приведем прямое доказательство этого факта.



Фиксируем произвольную последовательность  $\bar{\omega}''_1, \bar{\omega}''_{l_1+1}, \dots, \bar{\omega}''_{l_2}$  и введем в рассмотрение следующее подмножество  $B \subset M'$ :

$$B = \{ \omega' \mid \varphi(\omega')_l = \bar{\omega}''_l, \quad l_1 \leq l \leq l_2 \}.$$

Мы покажем, что  $\mu(B) = 1/4^{l_2-l_1+1}$ . Обозначим

$$I''_r = \{ l, \quad l_1 \leq l \leq l_2 \mid \bar{\omega}_1 = r \}, \quad 1 \leq r \leq 4.$$

Тогда  $\omega'_1 = 1$  или 2 для  $l \in I''_1$ ,  $\omega'_1 = 3$  или 4 для  $l \in I''_2$ ,  $\omega'_1 = 5$  для  $l \in I''_3 \cup I''_4$ . Для каждого  $l \in I''_3 \cup I''_4$  возьмем соответствующее значение  $l' = l'(l)$ , рассмотренное выше.

Если  $B(\{l'(l)\})$  — множество последовательностей  $\omega' \subset B$ , для которых  $\{l'(l)\}$  принимает фиксированные значения, то

$$\begin{aligned} \mu'(B) &= \sum_{B(\{l'(l)\})} \mu'(\{\omega' \mid \omega'_1 = 1 \text{ или } 2 \text{ для } l \in I''_1; \\ &\quad \omega'_1 = 3 \text{ или } 4 \text{ для } l \in I''_2; \\ &\quad \omega'_1 = 5 \text{ для } l \in I''_3 \cup I''_4; \\ &\quad \omega'_1 = 1 \text{ или } 3 \text{ для } l'(l), \text{ соответствующего } l \in I''_3, \\ &\quad \omega'_1 = 2 \text{ или } 4 \text{ для } l'(l), \text{ соответствующего } l \in I''_4\}) \times \\ &\quad \times \mu(B(\{l'(l)\})) = \frac{1}{4^{l_1+1}} \frac{1}{4^{l_2+1}} \frac{1}{2^{l_2+1+l_1}} \frac{1}{2^{l_2+1+l_1}}. \end{aligned}$$

Последняя дробь  $\frac{1}{2^{l_2+1+l_1}}$  есть условная вероятность соответствующих значений  $\omega'_{l'(l)}$ , которая не зависит от условий, приводящих к заданным значениям  $\omega''_{l_i}$ . Полученное произведение равно  $\frac{1}{4^{l_2-l_1+1}}$ , что и дает требуемый результат.

Сейчас, после доказательства того, что  $\varphi^* \mu' = \mu''$ , мы получаем, что  $\varphi$  отображает  $M'$  на  $M'' \pmod{0}$  и с вероятностью 1 обратимо. Это и завершает доказательство изоморфизма.

Прежде чем перейти к рассмотрению следующего примера, введем два важных определения. Ниже через  $\varepsilon$  обозначается разбиение фазового пространства  $M$  на отдельные точки.

**Определение 2.** Пусть  $T$  — эндоморфизм пространства  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Счетное разбиение  $\xi \{C_1, C_2, \dots, C_r, \dots\}$  называется образующим разбиением для эндоморфизма  $T$ , если

$$\bigvee_{n \geq 0} T^{-n} \xi = \varepsilon \pmod{0}.$$

Определение 2'. Пусть  $T$  — автоморфизм пространства  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Счетное разбиение  $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_r, \dots\}$  называется образующим разбиением автоморфизма  $T$ , если

$$\bigvee_{-\infty < n < \infty} T^{-n} \xi = \varepsilon \pmod{0}.$$

Эквивалентное определение образующего разбиения может быть дано в терминах  $\sigma$ -алгебр: наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая множества  $T^{-n} C_i$ ,  $n \geq 0$ ,  $i \geq 1$ , в случае эндоморфизмов и  $T^{-n} C_i$ ,  $-\infty < n < \infty$ ,  $i \geq 1$ , в случае автоморфизмов, совпадает с  $\sigma$ -алгеброй всех измеримых множеств. В такой форме определение образующего разбиения может быть естественно перенесено и на несчетные разбиения. Для выяснения того, является ли данное счетное разбиение образующим, полезен следующий критерий Рохлина (см. ссылку [4] предыдущей лекции)\*): *разбиение  $\xi$  является образующим, если существует подмножество  $M' \subset M$ ,  $\mu(M') = 1$ , такое, что для любых  $x, y \in M'$  можно найти  $i, n$ , при которых  $T^n x \in C_i$ ,  $T^n y \notin C_i$* . Здесь  $n$  должно быть неотрицательным в случае эндоморфизмов и может быть произвольным целым числом в случае автоморфизмов.

Вот нетривиальный пример образующего разбиения в примере Мешалкина: рассмотрим множества

$$C_i = \{\omega' \mid \omega'_0 = \varphi(\omega')_0 = i\}, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Тогда, как легко следует из конструкции, разбиение  $\xi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  является образующим.

Понятие образующего разбиения интересно и с точки зрения теории вероятностей. Ограничимся случаем автоморфизмов.

Рассмотрим пространство  $\Omega$  последовательностей  $\omega = \{\omega_n\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ , где каждое  $\{\omega_n\}$  есть реализация стационарного случайного процесса со счетным числом состояний. Введем в  $\Omega$  вероятностную меру  $P$ , положив

$$P\{\omega \mid \omega_{n_1} = i_1, \omega_{n_2} = i_2, \dots, \omega_{n_r} = i_r\} = \\ = \mu\{x \mid T^{n_1} x \in C_{i_1}, T^{n_2} x \in C_{i_2}, \dots, T^{n_r} x \in C_{i_r}\}.$$

Инвариантность  $\mu$  влечет инвариантность меры  $P$  относительно сдвига, т. е.  $P$  действительно отвечает стационарному случайному процессу. Мы можем сказать также, что если преобразование  $T$  имеет счетное образующее разбиение, то оно изоморфно стационарному случайному процессу со

\*) См. также лекцию 1.

счетным множеством состояний. Этот изоморфизм часто оказывается полезным, когда мы исследуем более детально свойства перемешивания, пытаемся доказывать центральную предельную теорему и т. п.

Обсудим понятие метрического изоморфизма в терминах случайных процессов. Предположим, что  $(\Omega', P')$  есть вероятностное пространство последовательностей  $\omega' = \{\omega'_k\}$  и сдвиг  $S'$ ,  $(S'\omega')_k = \omega'_{k+1}$ , сохраняет  $P'$ . Если  $(\Omega'', P'')$  — другое аналогичное пространство и сдвиг  $S''$  действует в  $\Omega''$ , то метрический изоморфизм  $S'$  и  $S''$  влечет существование  $\varphi$ , отображающего  $\Omega'$  на  $\Omega''$  и коммутирующего со сдвигом. Отображение  $\varphi$  определяет функцию  $\varphi(\omega')$  со значениями в  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , для которой  $\omega''_k = \varphi(T^k \omega')$ ,  $-\infty < k < \infty$ . Иными словами,  $\varphi(\omega')$  есть значение  $\omega''_0$ , которое с помощью сдвига дает возможность целиком восстановить последовательность  $\omega''$ . Переход  $\omega' \mapsto \varphi(\omega') = \omega''$  может рассматриваться как некоторое кодирование. Коды, которые задаются одной функцией  $\varphi(\omega')$ , называются *стационарными кодами*.

Таким образом, задача установления метрического изоморфизма оказывается во многих случаях задачей построения стационарных кодов. Эта точка зрения полезна в энтропийной теории динамических систем (см. часть II).

Сейчас будет рассмотрен еще один пример метрического изоморфизма.

**Пример 2.** Предположим, что  $M$  — двумерный тор с лебеговой мерой и  $T$  — его групповой автоморфизм, задаваемый

двумерной целочисленной матрицей  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\det A = \pm 1$ .

Как было показано в лекции 2,  $T$  эргодичен тогда и только тогда, когда  $A$  не имеет собственных значений, по модулю равных 1. Последнее условие выполнено, если выполнено неравенство  $|\operatorname{tr} A| = |a + d| > 2$ . При этом  $A$  имеет собственный вектор  $e^{(u)}$  с собственным значением  $\lambda_1$ ,  $|\lambda_1| > 1$  и собственный вектор  $e^{(s)}$  с собственным значением  $\lambda_2$ ,  $|\lambda_2| < 1$ . Полутраектории точек  $x, y$ , для которых отрезок  $y - x$  параллелен  $e^{(u)}(e^{(s)})$ , сближаются экспоненциально при  $n \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Теорема 3.**  $T$  метрически изоморфен сдвигу Маркова (см. [2]).

**Доказательство.** Обозначим через  $M_0$  двумерную плоскость, которая является универсальной накрывающей  $M$ . Назовем «параллелограммом» обычный параллелограмм  $C \subset M_0$ , стороны которого параллельны  $e^{(u)}$  и  $e^{(s)}$  соответственно, причем каноническое отображение  $M_0 \rightarrow M$  взаимно-

однозначно на  $C$ . Другими словами,  $C$  может рассматриваться как подмножество тора, которое одновременно является параллелограммом в обычном смысле. Пусть  $\gamma^{(u)}(C)$  ( $\gamma^{(s)}(C)$ ) есть объединение сторон параллелограмма  $C$ , параллельных  $e^{(u)}$  ( $e^{(s)}$ ), которое мы будем называть неустойчивой (устойчивой) границей параллелограмма  $C$ . Если  $C$  — параллелограмм, то  $TC$  и  $T^{-1}C$  также параллелограммы.

Пусть имеется конечное разбиение  $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  тора  $M$ , элементы которого — параллелограммы. Это означает, что

$$\bigcup_{i=1}^r \bar{C}_i = M, \quad C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j. \quad \text{Положим}$$

$$\gamma^{(u)}(\xi) = \bigcup_{i=1}^r \gamma^{(u)}(C_i), \quad \gamma^{(s)}(\xi) = \bigcup_{i=1}^r \gamma^{(s)}(C_i).$$

**Определение 3.** Разбиение  $\xi$  называется *марковским*, если  $T\gamma^{(s)}(\xi) \subset \gamma^{(s)}(\xi)$ ,  $T^{-1}\gamma^{(u)}(\xi) \subset \gamma^{(u)}(\xi)$ .

Отметим, что  $T\gamma^{(s)}(\xi)$  ( $T^{-1}\gamma^{(u)}(\xi)$ ) есть устойчивая граница разбиения  $T\xi = \{TC_1, \dots, TC_r\}$  ( $T^{-1}\xi = \{T^{-1}C_1, T^{-1}C_2, \dots, T^{-1}C_r\}$ ).

**Лемма 1.** Если  $\gamma$  — марковское разбиение такое, что все пересечения  $C_i \cap TC_j$ ,  $C_i \cap T^{-1}C_j$  связны, то  $\xi$  есть образующее разбиение.

**Доказательство.** Если  $\xi$  — марковское разбиение, то  $C_i \cap TC_j$  есть объединение нескольких параллелограммов, устойчивые границы которых принадлежат  $\gamma^{(s)}(C_i)$ . Если

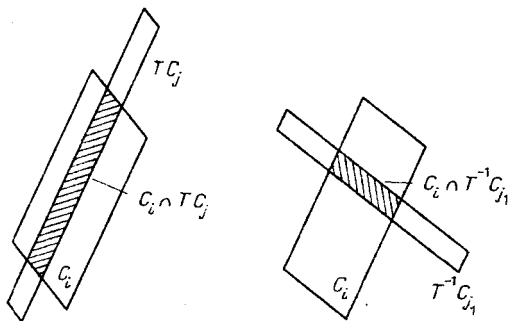


Рис. 3.1

указанное пересечение состоит только из одного параллелограмма, то его устойчивая граница в  $|\lambda_2|$  раз короче, чем у  $C_j$ , а неустойчивая граница  $C_i \cap TC_j$  имеет тот же размер, что и у  $C_i$  (см. рис. 3.1). Точно так же пересечение  $C_{i_0} \cap TC_{i_1} \cap \dots \cap T^n C_{i_n}$  связно и является параллелограммом,

устойчивая граница которого имеет длину, не превышающую  $\text{const} \cdot |\lambda_2|^n$ , а неустойчивая — ту же, что и у  $C_i$ . Если мы рассмотрим пересечения  $C_{i_0} \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}}$ , то все они связны и являются параллелограммами, причем их устойчивые границы имеют длины, не превосходящие  $\text{const} \cdot |\lambda_1|^{-n} = \text{const} \cdot |\lambda_2|^n$ . Следовательно, любое пересечение

$\bigcap_{-n} T^k C_{i_k}$  есть параллелограмм, диаметр которого не превос-

ходит  $\text{const} \cdot |\lambda_2|^n$ , и поэтому бесконечное пересечение  $\bigcap_{-\infty}^{\infty} T^k C_{i_k}$

не может содержать более одной точки. Из критерия Рохлина (см. выше 2) вытекает, что  $\xi$  есть образующее разбиение, что и требовалось доказать.

Рассмотрим марковское образующее разбиение  $\xi$ . Оно определяет меру  $\mu'$  в пространстве  $\Omega$  последовательностей  $\omega = \{\omega_k\}_{-\infty}^{\infty}$ , где каждое  $\omega_k$  принимает  $r$  значений 1, 2, ...,  $r$  и

$$\mu' \{ \omega | \omega_{k_1} = i_1, \omega_{k_2} = i_2, \dots, \omega_{k_s} = i_s \} = \mu \{ x | T^{-k_1} x \in C_{i_1}, 1 \leq l \leq s \}.$$

Как всегда, мера  $\mu'$  инвариантна относительно сдвига  $S$  в  $\Omega$ .

**Лемма 2.** Если  $\xi$  — марковское разбиение, то  $\mu'$  — марковская мера.

**Доказательство.** Ограничимся случаем, когда  $\xi$  — образующее разбиение. В общем случае рассуждения аналогичны. Мы должны показать, что

$$\mu \{ TC_j | C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}} \} = \mu \{ TC_j | C_i \}.$$

Обозначим через  $l^{(s)}(C)$  длину стороны неустойчивой границы параллелограмма  $C$ . Тогда из предыдущего  $\mu \{ TC_j | C_i \} = l^{(s)}(TC_j) / l^{(s)}(C_i) = |\lambda_2| l^{(s)}(C_j) / l^{(s)}(C_i)$ . Имеет место также равенство

$$\begin{aligned} \mu \{ TC_j | C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}} \} = \\ = \frac{\mu \{ TC_j \cap C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}} \}}{\mu \{ C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}} \}}. \end{aligned}$$

Из определения марковского разбиения вытекает, что  $C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}}$  есть параллелограмм, у которого устойчивая граница имеет ту же длину, что и у  $C_i$ . Но это означает, как и выше, что правая часть последнего соотношения равна

$$\frac{l^{(s)}(TC_j \cap C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}})}{l^{(s)}(C_i \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_{-n}})} = \frac{|\lambda_2| l^{(s)}(C_j)}{l^{(s)}(C_i)},$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы закончить доказательство теоремы, остается построить марковское разбиение  $\xi$ , удовлетворяющее условиям леммы 1. Предположим, что  $\xi_0 = \{C_1^{(0)}, \dots, C_r^{(0)}\}$  — произвольное марковское разбиение. Обозначим через  $\xi$  новое разбиение, элементы которого являются связными компонентами пересечений  $C_i^{(0)} \cap TC_j^{(0)}$ . Оно является марковским разбиением, поскольку

$$\gamma^{(s)}(\xi) = \gamma^{(s)}(\xi_0), \quad \gamma^{(u)}(\xi) = \gamma^{(u)}(T\xi).$$

Легко видеть, что  $\xi$  удовлетворяет условиям леммы 1. Таким образом, достаточно построить произвольное марковское разбиение.

Мы построим марковское разбиение  $\xi$ , состоящее из двух элементов  $C_1, C_2$ , причем  $\gamma^{(u)}(\xi)$  ( $\gamma^{(s)}(\xi)$ ) будет отрезком,

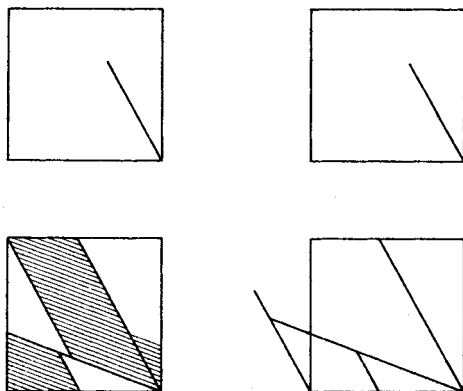


Рис. 3.2

содержащим точку  $O$ , направленным вдоль  $e^{(u)}(e^{(s)})$ . Последовательность шагов построения этого разбиения  $\xi$  представлена на рис. 3.2.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

- 1° Изложенные в этой лекции примеры изоморфизма см. в статьях [1] Мешалкин Л. Д. Один случай изоморфизма схем Бернулли // ДАН СССР.— 1959.— Т. 128, № 1.— С. 41—44.
- [2] Adler R. L., Weiss B. Entropy be a complete metric invariant for automorphisms of the torus // Proc. Nat. Acad. Sci., USA.— 1967.— V. 57, № 6.— P. 1573—1576.

2° Разбиения, построенные при доказательстве теоремы 3, являются частным случаем общих марковских разбиений. Об этом более подробно говорится в части V.

## ЛЕКЦИЯ 4

### ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЧИСТО ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

В этой и следующих лекциях мы будем рассматривать интересный класс динамических систем, который появляется также в многочисленных приложениях эргодической теории.

**Определение 1.** Пусть  $T$  — автоморфизм пространства с мерой  $(M, \mu)$ . Тогда  $T$  называется автоморфизмом с чисто точечным спектром, если сопряженный оператор  $U_T$  имеет полную систему ортонормированных собственных функций, т. е. если существуют ортогональный нормированный базис  $\{f_k(x)\}$  пространства  $L^2(M, \mu)$  и такая последовательность чисел  $\lambda_k \in S^1$ , что

$$U_T f_k(x) = f_k(Tx) = \lambda_k f_k(x) \text{ почти всюду.}$$

В качестве простейшего примера возьмем  $M = S^1$ , где  $S^1$  — окружность,  $\mu$  будет мерой Лебега, и  $Tx = x + a \pmod{1}$ . Тогда  $f(x) = e^{2\pi i k x}$  — собственные функции, поскольку

$$U_T f_k(x) = e^{2\pi i k (x+a)} = e^{2\pi i k a} e^{2\pi i k x}$$

и  $\lambda_k = e^{2\pi i k a}$ . Естественное обобщение возникает в случае  $M = \text{Tor}^d$ ,  $\mu$  — мера Лебега и  $Tx = x + a$ , где  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_d)$ ,  $x + a = (x_1 + a_1 \pmod{1}, \dots, x_d + a_d \pmod{1})$ . Здесь  $T$  снова автоморфизм с чисто точечным спектром, так как  $\exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^d n_s x_s\right\}$  — собственные функции, а отвечающие им собственные значения равны  $\exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^d n_s a_s\right\}$ .

Мы можем теперь ввести далеко идущее обобщение. Предположим, что  $M$  — компактная сепарабельная абелева группа, а  $\mu$  — нормированная мера Хаара на  $M$ . Вспомним, что мера Хаара — единственная мера, инвариантная относительно сдвигов, т. е.  $\mu(A) = \mu(A + g)$  для всех  $g \in M$  и всех  $A \in \mathcal{M}$ . Через  $T_a$  обозначим сдвиг на элемент  $a \in M$ :  $T_a x = x + a$ . Инвариантность меры Хаара  $\mu$  под действием  $T_a$  следует из определения  $\mu$ .

Покажем, что  $T_a$  является автоморфизмом с чисто точечным спектром. Для этого нужно ввести понятие характера абелевой группы.

**Определение 2.** Пусть  $M$  — топологическая абелева группа. Ее характером  $\chi$  называется гомоморфизм  $M$  в  $S^1$ . Иными словами,  $\chi$  есть непрерывная функция на  $M$  со значениями в  $S^1$ , для которой  $\chi(x+y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$ .

Тривиальный характер  $\chi_0$  есть отображение  $M$  в 1, т. е.  $\chi_0(x) \equiv 1$ . Если  $\chi_1, \chi_2$  — два характера, то  $\chi_1(x) \cdot \chi_2(x) = \chi_3(x)$ ,  $\chi_1(x) \cdot \overline{\chi_2(x)} = \chi_1(x) \cdot (\chi_2(x))^{-1} = \chi_4(x)$  также характеры. Таким образом, множество характеров естественным образом превращается в группу. В случае, когда  $M = \text{Tor}^d$ , каждый характер имеет вид  $\chi(x) = \exp \left[ 2\pi i \left\{ \sum_{s=1}^d n_s x_s \right\} \right]$  и группа характеров естественно изоморфна  $\mathbf{Z}^d$ . Теорема двойственности Понтрягина утверждает, что если  $M$  — компактная абелева группа, то ее группа характеров  $M'$  счетна. Заметим также, что для каждого характера  $\chi \neq \chi_0$

$$\int_M \chi(x) d\mu(x) = 0. \quad (1)$$

Действительно, для каждого  $a \in M$

$$\begin{aligned} \chi(a) \cdot \int \chi(x) d\mu(x) &= \int \chi(x+a) d\mu(x) = \\ &= \int \chi(x+a) d\mu(x+a) = \int \chi(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Так как  $\chi \neq \chi_0$ , найдется такое  $a \in M$ , что  $\chi(a) \neq 1$ . Следовательно, выполнено (1).

Отсюда немедленно вытекает, что для двух характеров  $\chi_1, \chi_2$ ,  $\chi_1 \neq \chi_2$

$$\int \chi_1(x) \overline{\chi_2(x)} d\mu(x) = \int \frac{\chi_1(x)}{\chi_2(x)} d\mu(x) = 0,$$

т. е. множество характеров  $M'$  является множеством ортонормированных функций. Мы будем пользоваться также тем фактом, что  $M' = \{\chi_n(x)\}$  образует ортонормированный базис в  $L^2(M, \mu)$ . Теперь видно сразу, что  $T_a$  есть автоморфизм с чисто точечным спектром, так как для каждого  $\chi_k \in M'$

$$U_a \chi_k(x) = \chi_k(x+a) = \chi_k(x) \chi_k(a), \quad \lambda_k = \chi_k(a).$$

Лемма 1.  $T_a$  эргодичен тогда и только тогда, когда  $\chi_k(a) \neq 1$  при всех  $k \neq 0$ .

Доказательство. Допустим, что  $f(x)$  — ограниченная (mod 0) инвариантная функция. Мы можем разложить ее в ряд Фурье

$$f = \sum_k (f, \chi_k) \chi_k,$$

сходящийся в  $L^2(M, \mu)$ . Тогда

$$U_a f = \sum_k (f, \chi_k) U_a \chi_k = \sum_k \chi_k(a) (f, \chi_k) \chi_k = \sum_k (f, \chi_k) \chi_k.$$

Из последнего равенства сразу же получаем, что из  $\chi_k(a) \neq 1$  при  $k \neq 0$  следует  $(f, \chi_k) = 0$ , т. е.  $f = (f, \chi_0) \chi_0 = \text{const} \pmod{0}$ . Следовательно,  $T_a$  эргодичен.



Предположим теперь, что  $\chi_k(a)=1$  для некоторого  $k \neq 0$ . Тогда  $\chi_k(x)$  — нетривиальная инвариантная функция и  $T$  неэргодичен. Лемма 1 доказана.

**Следствие.** Сдвиг  $T_a$   $d$ -мерного тора эргодичен тогда и только тогда, когда равенство  $\sum_{s=1}^d n_s a_s = n$  при целых  $n_s$ ,  $1 \leq s \leq d$ , и целом  $n$  выполняется лишь при  $n = n_s = 0$ ,  $1 \leq s \leq d$ .

Любая группа сдвигов  $\{T_a^n\}$  устойчива в следующем смысле. Допустим, что  $u \in O_x$ , где  $O_x$  — окрестность точки  $x$ . Размер окрестности  $O_x$  характеризует близость точек  $x$  и  $u$ . Тогда  $T_a^n u \in T_a^n O_x = O_x + na$ , откуда видно, что близость точек  $T_a^n u$  и  $T_a^n x$  не зависит от  $n$ . Мы выведем из этого свойства следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $T_a$  — эргодический сдвиг на группе  $M$ , а  $f$  — произвольная непрерывная функция. Тогда для каждого  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_a^k x) = \int f(u) d\mu(u). \quad (2)$$

**Доказательство.** Формула (2) для почти всех  $x$  следует из эргодичности  $T_a$  и эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина. Взяв  $\varepsilon > 0$ , найдем такую окрестность  $O$  нуля, что  $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon/2$  для произвольных  $x', x'' \in O + g$ , где  $g$  — любой элемент  $M$ . Для произвольного  $x$  возьмем  $O + x$  и выберем  $x_0 \in O + x$ , для которой выполнено (2). Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_a^k x) - \int f(u) d\mu(u) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_a^k x) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_a^k x_0) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_a^k x_0) - \int f(u) d\mu(u) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f(T_a^k x) - f(T_a^k x_0) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_a^k x_0) - \int f(u) d\mu(u) \right|. \quad (3) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое меньше  $\varepsilon/2$  для достаточно больших  $n$ . Точно так же  $|f(T_a^k x) - f(T_a^k x_0)| \leq \varepsilon/2$ ,  $1 \leq k \leq n$ , поскольку  $T_a^k x_0 \in O + x + ka$ . Таким образом, (3) меньше  $\varepsilon$  при всех достаточно больших  $n$ . Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** Для любой непрерывной периодической функции  $f$  периода 1 на  $\mathbf{R}^1$  и для произвольного иррационального  $a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + ka) = \int_0^1 f(u) du.$$

Следствие 2. Каждый сдвиг  $T_a$  строго эргодичен, т. е. инвариантная мера  $\mu$  единственна.

Действительно, если  $\mu_0$  — эргодическая инвариантная мера, отличная от  $\mu$ , то можно найти непрерывную функцию  $f$ , для которой  $\int f d\mu_0 \neq \int f d\mu$ , и точку  $z \in M$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum f(T^k z) = \int f d\mu_0$ , что противоречит теореме 1.

Рассмотрим сейчас один пример автоморфизма с чисто точечным спектром. Этот пример связан с универсальностью Фейгенбаума в теории одномерных отображений, которая будет обсуждаться позже (см. часть III).

Рассматриваются отрезок  $M = [-1, 1]$  и функция  $\varphi(x)$ ,  $x \in M$ , имеющая следующие свойства:

$$1) \varphi(x) = \varphi(-x); \quad 2) \varphi(0) = 1; \quad 3) \varphi''(x) < 0;$$

и удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\alpha} \varphi \circ \varphi(\alpha x), \quad \text{где } \alpha = -\varphi(1). \quad (4)$$

В настоящее время имеется несколько доказательств существования решения этого уравнения (см. ссылки в конце лекции) и богатая информация о свойствах функции (4). В частности, коэффициенты ее разложения Тэйлора вблизи  $x=0$  хорошо известны:

$$\varphi(x) = 1 - 1,5276 \cdot x^2 + 0,10482 \cdot x^4 + \dots$$

и  $\alpha^{-1} = 2,50290$ . Для нас существенно, что  $\varphi(\alpha) > \alpha$ . Нам понадобится следующее следствие (4).

Лемма 2. Для каждого  $n > 0$

$$\varphi(x) = (-1)^n \alpha^{-n} \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^n}(\alpha^n x). \quad (5)$$

Доказательство проведем индукцией по  $n$ . Для  $n=1$  формулы (4) и (5) совпадают. Предположим, что (5) установлена для  $n=m-1$ . Имеем тогда

$$\begin{aligned} \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^m}(\alpha^m x) &= \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^{m-1}} \circ \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^{m-1}}(\alpha^{m-1} \cdot \alpha x) = \\ &= \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^{m-1}}((-1)^{m-1} \alpha^{m-1} \varphi(\alpha x)) = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^{m-1}}(\alpha^{m-1} \cdot \varphi(\alpha x)) = \\ &= (-1)^{m-1} \alpha^{m-1} \varphi \circ \varphi(\alpha x) = (-1)^m \alpha^m \varphi(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Введем отображение  $T_\Phi$  отрезка  $[-1, 1]$  в себя такое, что  $T_\Phi x = \varphi(x)$ . Положим  $\Delta_0^{(n)} = [-\alpha^n, \alpha^n]$ ,  $\Delta_k^{(n)} = T_\Phi^k \Delta_0^{(n)}$ .

Лемма 3. Отрезки  $\Delta_k^{(n)}$  обладают следующими свойствами:

$$1) \Delta_{k_1}^{(n)} \cap \Delta_{k_2}^{(n)} = \emptyset \text{ для } 0 \leq k_1, k_2 < 2^n, k_1 \neq k_2;$$

$$2) \Delta_{2^n}^{(n)} \subset \Delta_0^{(n)};$$

$$3) \Delta_k^{(n-1)} \supset \Delta_k^{(n)} \cup \Delta_{k+2^{n-1}}^{(n)}.$$

Доказательство. Свойство 2) следует непосредственно из (5). В самом деле,  $\alpha^n x$  пробегает  $\Delta_0^{(n)}$ , когда  $x$  пробегает  $[-1, 1]$ . Из (5) мы имеем  $|\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^n}(\alpha^n x)| \leq \alpha^n |\varphi(x)| \leq \alpha^n$ , по-

скольку  $|\varphi(x)| \leq 1$ .

Свойство 3) достаточно доказать только для  $k=0$ . Но в этом случае  $\Delta_0^{(n)} \subset \Delta_0^{(n-1)}$ ,  $\Delta_{2^{n-1}}^{(n)} \subset \Delta_{2^{n-1}}^{(n-1)} \supset \Delta_0^{(n-1)}$ , что следует из (2).

Доказательство 1) проведем по индукции. Для  $n=1$  оно легко вытекает из вида  $\varphi$ . Предположим, что 1) доказано для  $n=m-1$ . Тогда  $\Delta_0^{(m)} \subset \Delta_0^{(m-1)}$  и по индуктивному предположению отрезки  $\Delta_k^{(m)}$  попарно не пересекаются при  $0 \leq k < 2^{m-1}$ . Покажем, что  $\Delta_{2^{m-1}}^{(m)} \subset \Delta_0^{(m-1)}$ ,  $\Delta_{2^{m-1}}^{(m)} \cap \Delta_0^{(m)} = \emptyset$ . Опять используем (5) для  $n=(m-1)$ :

$$(-1)^{m-1} \alpha^{m-1} \varphi(x) = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^{m-1}}(\alpha^{m-1} x).$$

Тогда  $\alpha^{m-1} x \in \Delta_0^{(m)}$  только при  $|x| \leq \alpha$  — это вытекает из того свойства  $\varphi$ , что  $|\varphi(x)| > \alpha$  при  $|x| \leq \alpha$ . А значит,  $|\alpha^{m-1} \varphi(x)| > \alpha^m$ , откуда  $\Delta_{2^{m-1}}^{(m)} \cap \Delta_0^{(m)} = \emptyset$ ,  $\Delta_{2^{m-1}}^{(m)} \subset \Delta_0^{(m-1)}$ . Теперь утверждение просто следует по индукции. Лемма 3 доказана.

Определение 3. Множество  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_k^{(n)}$  называется аттрактором Фейгенбаума.

Можно показать, что  $\text{dist}(T_\Phi^n x, F) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $x$  за исключением счетного подмножества отрезка  $[-1, 1]$ . Это объясняет, в каком смысле  $F$  является аттрактором. Лемма 3 дает также равенство  $T_\Phi F = F$ .

Теорема 2. Существует единственная мера  $\mu_0$ , сосредоточенная на  $F$  (т. е.  $\mu_0(F) = 1$ ), инвариантная относительно  $T_\Phi$ . Соответствующий унитарный оператор  $U_{T_\Phi}$  имеет чисто точечный спектр с собственными значениями  $1$  и  $\exp\left(2\pi i \cdot \frac{2p+1}{2^r}\right)$ ,  $r=1, 2, \dots$ ,  $p=0, 1, \dots, 2^{r-1}-1$ .

Доказательство. По крайней мере одна инвариантная мера  $\mu_0$ , сосредоточенная на  $F$ , существует в силу теоремы Боголюбова — Крылова. Для этой меры  $\mu_0(\Delta_k^{(n)}) = 2^{-k}$ ,

$0 \leq k < 2^n$ . Но любая мера  $\mu_0$ , сосредоточенная на  $F$ , определяется однозначно по ее значениям на отрезках  $\Delta_k^{(n)}$ ,  $0 \leq k < 2^n$ . Это следует из того, что если  $\eta_n$  — разбиение  $F$  на множества  $F \cap \Delta_k^{(n)}$ , то  $\eta_n \leq \eta_{n+1} \leq \dots$  и  $\bigvee_n \eta_n = \varepsilon$ .

Теперь мы построим для каждого

$$\lambda_{p,r} = \exp \left( 2\pi i \cdot \frac{2p+1}{2^r} \right)$$

соответствующую собственную функцию. Положим

$$f_{p,r}(x) = c \quad \text{для } x \in \Delta_0^{(r)},$$

где  $c$  — произвольная константа,  $|c|=1$ . Уравнение для собственной функции  $f_{p,r}(T_\Phi x) = \lambda_{p,r} f_{p,r}(x)$  позволяет определить  $f_{p,r}(x)$  для  $x \in \Delta_k^{(r)}$  равным  $c \lambda_{p,r}^k$ . Тогда для  $x \in \Delta_{2^{r-1}}^{(r)}$  справедливо соотношение  $f_{p,r}(T_\Phi x) = \lambda_{p,r} f_{p,r}(x)$  в силу вида  $\lambda_{p,r}$  и включения  $\Delta_{2^{r-1}}^{(r)} \subset \Delta_0^{(r)}$ .

Мы должны показать, что множество функций  $f_{p,r}$  образует ортогональный базис. Различные функции  $f_{p,r}$  ортогональны, поскольку они имеют различные собственные значения. Все функции 1,  $f_{p,r}$ ,  $p \leq n$ , принимают постоянные значения на каждом отрезке  $\Delta_k^{(n)}$ ,  $0 \leq k < 2^{n-1}$ , т. е. измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{M}(\eta_n)$ . Их общее число равно

$$1 + \sum_{r=1}^n 2^{r-1} = 2^n.$$

А тогда они порождают все  $L^2(M|\eta^{(n)}, \mu_0)$ . Устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получаем желаемый результат. Теорема 2 доказана.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Теория эргодических динамических систем с чисто точечным спектром излагается в монографии

[1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

2° По поводу теории Фейгенбаума см. работы М. Фейгенбаума

[2] Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of non-linear transformations // J. Stat. Phys. — 1978. — V. 14. — P. 25—52;

[3] Feigenbaum M. J. The universal metric properties of non-linear transformations // J. Stat. Phys. — 1979. — V. 21. — P. 669—706.

А также

[4] Collet P., Eckmann J.-R. Iterated maps on the interval as dynamical systems. — Boston: Birkhauser, 1980.

Более подробное обсуждение и другие ссылки см. в конце лекции 11.

**ОБЩИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭРГОДИЧЕСКИХ  
АВТОМОРФИЗМОВ. ИЗОМОРФИЗМ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧИСТО  
ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ**

Пусть  $T$  — произвольный эргодический автоморфизм пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  и  $U_T$  — сопряженный унитарный оператор гильбертова пространства  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

Обозначим через  $\Lambda_{pp}(T)$  такое подмножество  $S^1$ , что для каждого  $\lambda \in \Lambda_{pp}(T)$  можно найти собственную функцию  $f_\lambda$  с собственным значением  $\lambda$ , т. е.  $(U_T f_\lambda)(x) = f_\lambda(Tx) = \lambda \cdot f_\lambda(x)$  (п.в.). Мы назовем  $\Lambda_{pp}(T)$  чисто точечной частью спектра оператора  $U_T$ . Подпространство собственных функций, отвечающих собственному значению  $\lambda$ , обозначим через  $H_\lambda$ .

**Теорема 1.** 1) Для каждой нормированной собственной функции  $f_\lambda$

$$|f_\lambda| = 1 \text{ почти всюду;}$$

2) каждое подпространство  $H_\lambda$  одномерно;

3) множество  $\Lambda_{pp}(T)$  — счетная подгруппа группы  $S^1$ .

**Доказательство.** Из уравнения для собственной функции получаем

$$|f_\lambda(Tx)| = |f_\lambda(x)| \pmod{0}.$$

Это означает, что  $|f_\lambda(x)|$  — инвариантная  $(\text{mod } 0)$  функция. Из эргодичности и условия нормировки вытекает, что  $|f_\lambda(x)| = 1$  (п.в.). Таким образом, 1) доказано.

Допустим, что для некоторого  $\lambda \in \Lambda_{pp}(T)$  существуют две ортогональные нормированные собственные функции  $f_\lambda^{(1)}, f_\lambda^{(2)}$ .

Тогда  $f_\lambda^{(1)}/f_\lambda^{(2)} \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$  согласно 1) и

$$U_T \left( \frac{f_\lambda^{(1)}(x)}{f_\lambda^{(2)}(x)} \right) = \frac{f_\lambda^{(1)}(Tx)}{f_\lambda^{(2)}(Tx)} = \frac{\lambda \cdot f_\lambda^{(1)}(x)}{\lambda \cdot f_\lambda^{(2)}(x)} = \frac{f_\lambda^{(1)}(x)}{f_\lambda^{(2)}(x)},$$

т. е.  $f_\lambda^{(1)}(x)/f_\lambda^{(2)}(x) = \text{const}$  (п.в.) и  $f_\lambda^{(1)}, f_\lambda^{(2)}$  не могут быть ортогональными. Это доказывает 2).

Чтобы доказать 3), мы покажем, что если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)$ , то  $\lambda_1 \lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)$ ,  $\lambda_1/\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)$ . Возьмем  $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}$ . Их произведение и отношение принадлежат  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$  (согласно 1)) и

$$U_T(f_{\lambda_1} \cdot f_{\lambda_2})(x) = f_{\lambda_1}(Tx) f_{\lambda_2}(Tx) = \lambda_1 \lambda_2 f_1(x) f_2(x) \pmod{0},$$

т. е.

$$f_{\lambda_1} \cdot f_{\lambda_2} \in H_{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Таким же точно способом получаем

$$U_T\left(\frac{f_{\lambda_1}}{f_{\lambda_2}}\right)(x) = \frac{f_{\lambda_1}(Tx)}{f_{\lambda_2}(Tx)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_2}(x)} \pmod{0},$$

т. е.  $f_{\lambda_1}/f_{\lambda_2} \in H_{\lambda_1/\lambda_2}$ , что доказывает 3).

**Следствие.** Если  $\Lambda_{pp}(T) \neq \{1\}$ , то отображение  $T_1$  прямого произведения  $(M \times M, \mu \times \mu)$ , действующее по формуле  $T_1(x, y) = (Tx, Ty)$ , не эргодично.

Действительно, возьмем  $\lambda \in \Lambda_{pp}(T)$ ,  $\lambda \neq 1$ , и  $f_\lambda \in H_\lambda$ . Тогда  $f_\lambda(x)/f_\lambda(y)$  — нетривиальная инвариантная функция для  $T_1$ .

Для каждого  $\lambda \in \Lambda_{pp}(T)$  различные собственные функции  $f_\lambda \in H_\lambda$  отличаются множителем, принадлежащим  $S^1$ . Мы уже видели, что если  $f_{\lambda_1} \in H_{\lambda_1}$ ,  $f_{\lambda_2} \in H_{\lambda_2}$ , то  $f_{\lambda_1} \cdot f_{\lambda_2} \in H_{\lambda_1 \lambda_2}$ . Следующая теорема очень важна для метрической классификации автоморфизмов с чисто точечным спектром.

**Теорема 2.** Для каждого  $\lambda \in \Lambda_{pp}(T)$  можно выбрать  $f_\lambda \in H_\lambda$  таким образом, что  $f_{\lambda_1} \cdot f_{\lambda_2} = f_{\lambda_1 \lambda_2}$  (п. в.) при любых  $\lambda_1, \lambda_2$ .

**Доказательство.** Выберем произвольно  $f_\lambda^{(0)} \in H_\lambda$  для всех  $\lambda \in \Lambda_{pp}(T)$ . Тогда  $f_\lambda^{(0)} \cdot f_\mu^{(0)} = c(\lambda, \mu) f_{\lambda \cdot \mu}^{(0)}$ . Функция  $c(\lambda, \mu)$  определена на  $\Lambda_{pp}(T) \times \Lambda_{pp}(T)$  и принимает значения в  $S^1$ . Она обладает следующими свойствами:

- 1)  $c(1, 1) = 1$ ;
- 2)  $c(\lambda, \mu) = c(\mu, \lambda)$ ;
- 3)  $c(\lambda_1, \lambda_2) \cdot c(\lambda_1 \lambda_2, \lambda_3) = c(\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3) \cdot c(\lambda_2, \lambda_3)$ .

Второе свойство следует из коммутативности умножения функций, третье — из ассоциативности умножения. Мы покажем, что каждая функция, обладающая свойствами 1) — 3), может быть записана в виде

$$c(\lambda, \mu) = \frac{a(\lambda \mu)}{a(\lambda) \cdot a(\mu)}$$

при некоторой функции  $a$ , определенной на  $\Lambda_{pp}(T)$  и принимающей значение в  $S^1$ . Если это считать доказанным, то функции  $f_\lambda = f_\lambda^{(0)} \cdot a(\lambda)$  решают нашу проблему.

Запишем  $\Lambda_{pp}(T)$  в виде  $\Lambda_{pp}(T) = \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ . Обозначим  $\Lambda_{pp}^{(n)}$  подгруппу, порожденную  $1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , и предположим,

что для всех  $\lambda, \mu \in \Lambda_{pp}^{(n)}$  мы доказали, что  $c(\lambda, \mu) = \frac{a(\lambda \mu)}{a(\lambda) a(\mu)}$ .

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по  $n$ . Если  $\lambda_{n+1} \in \Lambda_{pp}^{(n)}$ , то наше утверждение уже доказано.

Предположим, что  $\lambda_{n+1}^r \notin \Lambda_{pp}^{(n)}$  ни для каких  $r \in \mathbb{Z}^1$ ,  $r \neq 0$ . В таком случае положим  $a(\lambda_{n+1}) = 1$ . Если же  $\lambda_{n+1}^r \in \Lambda_{pp}^{(n)}$  для некоторого  $r \neq 0$ , то множество всех таких  $r$  будет подгруппой  $\mathbb{Z}^1$ . Следовательно, существует  $h > 0$  такое, что все эти  $r$  имеют

вид  $r=hm$ ,  $-\infty < m < \infty$ . Из индуктивного предположения следует, что  $a(\lambda_{n+1}^r)$  уже определено. Мы должны добиться того, чтобы

$$c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}) = \frac{a(\lambda_{n+1}^{p+1})}{a(\lambda_{n+1}^p) \cdot a(\lambda_{n+1})}. \quad (1)$$

Взяв произведение в обеих частях равенства (1) по  $p$  от 0 до  $h-1$ , получим, что

$$\prod_{p=0}^{h-1} c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}) = \frac{a(\lambda_{n+1}^h)}{(a(\lambda_{n+1}))^h},$$

или

$$(a(\lambda_{n+1}))^h = a(\lambda_{n+1}^h) \cdot \left( \prod_{p=0}^{h-1} c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}) \right)^{-1}.$$

Определим  $a(\lambda_{n+1})$  равным некоторому корню этого уравнения. Используя (1), можно положить для  $r > 0$

$$a(\lambda_{n+1}^r) = (a(\lambda_{n+1}))^r \cdot \prod_{s=0}^{r-1} c(\lambda_{n+1}^s, \lambda_{n+1}).$$

Для  $r < 0$  мы используем равенство

$$c(\lambda_{n+1}^r, \lambda_{n+1}^{-r}) = (a(\lambda_{n+1}^r) \cdot a(\lambda_{n+1}^{-r}))^{-1},$$

которое приводит к определению  $a(\lambda_{n+1}^r)$ . Таким способом мы распространяем определение  $a(\lambda)$  на все  $\lambda = \lambda_{n+1}^r$ . Покажем, что согласно этому определению

$$a(\lambda_{n+1}^{p+q}) = a(\lambda_{n+1}^p) \cdot a(\lambda_{n+1}^q) \cdot (c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}^q)). \quad (2)$$

Рассмотрим случай  $p > 0$ ,  $q > 0$ ; другие случаи рассматриваются аналогично.

Для  $p=0$ , положив в 3)  $\lambda_1 = \lambda_{n+1}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , мы получим

$$c^2(\lambda_{n+1}, 1) = c(\lambda_{n+1}, 1),$$

т. е.  $c(\lambda_{n+1}, 1) = 1$ . Это доказывает (2) для  $p=0$ . Проведем индукцию, предположив, что (2) выполнено для некоторого  $p$ . Используя определение  $a(\lambda_{n+1}^p)$  и индуктивное предположение, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{s=0}^{p+q-1} c(\lambda_{n+1}^s, \lambda_{n+1}) &= \\ &= c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}^q) \cdot \prod_{s=0}^{p-1} c(\lambda_{n+1}^s, \lambda_{n+1}) \cdot \prod_{s=0}^{q-1} c(\lambda_{n+1}^s, \lambda_{n+1}). \end{aligned}$$

Тогда для перехода от  $p$  к  $p+1$  мы должны показать, что

$$c(\lambda_{n+1}^{p+q}, \lambda_{n+1}) \cdot c(\lambda_{n+1}^q, \lambda_{n+1}^p) = c(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^q) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}).$$

Но это следует из равенства 3), если в нем взять

$$\lambda_1 = \lambda_{n+1}^q, \quad \lambda_2 = \lambda_{n+1}^p, \quad \lambda_3 = \lambda_{n+1}.$$

Распространим теперь определение  $a(\lambda)$  на все  $\lambda \in \Lambda_{pp}^{(n+1)}$ . Предположим, что  $\lambda = \lambda_{n+1}^r \cdot \mu$ ,  $\mu \in \Lambda_{pp}^{(n)}$ . Мы положим

$$a(\lambda) = c(\lambda_{n+1}^r, \mu) \cdot (a(\lambda_{n+1}^r) \cdot a(\mu))^{-1}. \quad (3)$$

Нам нужно показать, что это определение корректно, т. е. не зависит от представления  $\lambda$  в таком виде. Действительно, если  $\lambda = \lambda_{n+1}^p \cdot \mu'$ , то  $(p-r) = mh$  и  $\mu = \lambda_{n+1}^{mh} \cdot \mu'$  и по индукции  $a(\mu) = c(\lambda_{n+1}^p, \mu') \cdot a(\lambda_{n+1}^{p-r}) \cdot a(\mu')$ . Подставив это в (3) и используя (2), мы получим

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= c(\lambda_{n+1}^r, \mu) \cdot c(\lambda_{n+1}^{p-r}, \mu') \cdot a(\lambda_{n+1}^r) \cdot a(\lambda_{n+1}^{p-r}) \cdot a(\mu') = \\ &= c(\lambda_{n+1}^r, \mu) \cdot c(\lambda_{n+1}^{p-r}, \mu') \cdot (c(\lambda_{n+1}^r, \lambda_{n+1}^{p-r}))^{-1} \cdot a(\lambda_{n+1}^p) \cdot a(\mu'). \end{aligned}$$

Тогда корректность определения вытекает из равенства

$$c(\lambda_{n+1}^r, \mu) \cdot c(\lambda_{n+1}^{p-r}, \mu') = c(\lambda_{n+1}^r, \lambda_{n+1}^{p-r}) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \mu').$$

Но последнее равенство есть частный случай 3), если положить  $\lambda_1 = \lambda_{n+1}^r$ ,  $\lambda_2 = \lambda_{n+1}^{p-r}$ ,  $\lambda_3 = \mu'$  и воспользоваться равенством  $\mu' \lambda_{n+1}^{p-r} = \mu$ .

Последний шаг состоит в доказательстве того, что корректно определенная функция  $a(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_{pp}^{(n+1)}$ , удовлетворяет нужному уравнению. Положим

$$\lambda' = \lambda_{n+1}^p \mu_1, \quad \lambda'' = \lambda_{n+1}^r \mu_2, \quad \mu_1 \in \Lambda_{pp}^{(n)}, \quad \mu_2 \in \Lambda_{pp}^{(n)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(\lambda') &= a(\lambda_{n+1}^p) \cdot a(\mu_1) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \mu_1), \\ a(\lambda'') &= a(\lambda_{n+1}^r) \cdot a(\mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^r, \mu_2), \\ a(\lambda' \cdot \lambda'') &= a(\lambda_{n+1}^{p+r}) \cdot a(\mu_1 \mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^{p+r}, \mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

По индукции

$$a(\mu_1) \cdot a(\mu_2) = a(\mu_1 \mu_2) \cdot (c(\mu_1, \mu_2))^{-1}.$$

Точно также, из (2)

$$a(\lambda_{n+1}^p) \cdot a(\lambda_{n+1}^r) = a(\lambda_{n+1}^{p+r}) \cdot (c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}^r))^{-1}.$$

Теперь доказательство равенства

$$c(\lambda', \lambda'') = \frac{a(\lambda' \cdot \lambda'')}{a(\lambda') \cdot a(\lambda'')}$$

сводится к доказательству того, что

$$\begin{aligned} c(\lambda_{n+1}^p \mu_1, \lambda_{n+1}^r \mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \mu_1) \cdot c(\lambda_{n+1}^r, \mu_2) = \\ = c(\lambda_{n+1}^{p+r}, \mu_1 \mu_2) \cdot c(\mu_1, \mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}^r). \quad (4) \end{aligned}$$



Преобразуем левую часть (4), используя (3):

$$\begin{aligned} c(\lambda_{n+1}^p \cdot \mu_1, \lambda_{n+1}^r \mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \mu_1) \cdot c(\lambda_{n+1}^r, \mu_2) = \\ = c(\mu_1, \lambda_{n+1}^r \mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \mu_1 \mu_2 \lambda_{n+1}^{p+r}) \cdot c(\lambda_{n+1}^r, \mu_2) = \\ = c(\mu_1, \mu_2) \cdot c(\mu_1 \mu_2, \lambda_{n+1}^r) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \mu_1 \mu_2 \lambda_{n+1}^{p+r}) = \\ = c(\mu_1, \mu_2) \cdot c(\lambda_{n+1}^p, \lambda_{n+1}^r) \cdot c(\lambda_{n+1}^{p+r}, \mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

В результате преобразований мы получили правую часть равенства (4), что и требовалось доказать.

**Замечание.** На самом деле теорема 2 есть результат гомологической алгебры, который может быть легко установлен чисто алгебраическими методами. Выше мы представили прямое доказательство, которое, возможно, будет проще для тех, кто не имеет опыта в соответствующих рассуждениях.

Сейчас будет доказана основная теорема этой лекции. Предположим, что эргодический автоморфизм с чисто точечным спектром  $T_1$  действует в пространстве с мерой  $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ , а эргодический автоморфизм  $T_2$  также с чисто точечным спектром — в пространстве с мерой  $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ . Обозначим через  $\Lambda_{pp}^{(1)}$ ,  $\Lambda_{pp}^{(2)}$  их спектры, т. е. соответствующие множества собственных значений.

**Теорема 3** (фон Нейман; см. [2]). *Автоморфизмы  $T_1$ ,  $T_2$  метрически изоморфны тогда и только тогда, когда  $\Lambda_{pp}^{(1)} = \Lambda_{pp}^{(2)}$ .*

**Доказательство.** Если  $T_1$ ,  $T_2$  изоморфны, то  $U_{T_1}$ ,  $U_{T_2}$  унитарно эквивалентны и, следовательно,  $\Lambda_{pp}^{(1)} = \Lambda_{pp}^{(2)}$ .

Докажем обратное. Пусть  $\Lambda_{pp}^{(1)} = \Lambda_{pp}^{(2)}$ . Тогда по теореме 2 мы можем найти такой базис  $\{f_\lambda^{(1)}\}$  гильбертова пространства  $L^2(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ ,  $\lambda \in \Lambda_{pp}^{(1)}$ , что  $f_{\lambda_1}^{(1)} \cdot f_{\lambda_2}^{(1)} = f_{\lambda_1 \lambda_2}^{(1)}$  при всех  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{pp}^{(1)}$ . Возьмем аналогичный базис  $\{f_\lambda^{(2)}\}$  в гильбертовом пространстве  $L^2(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ . Определим теперь изоморфизм  $V$  между обоими гильбертовыми пространствами, положив

$$V(\sum c_\lambda f_\lambda^{(1)}) = \sum c_\lambda f_\lambda^{(2)}.$$

Мы объясним, почему этот изоморфизм на самом деле индуцирован изоморфизмом  $\phi$  пространств с мерой  $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$  и  $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ .

Рассмотрим плотное подмножество конечных линейных комбинаций  $h(x_1) = \sum c_\lambda f_\lambda^{(1)}(x_1)$ ,  $h(x_2) = \sum d_\lambda f_\lambda^{(2)}(x_2)$ . Причина, по которой выбирается специальный базис, лежит в соотношении  $V(h_1 \cdot h_2) = V(h_1) \cdot V(h_2)$ , которое вытекает сразу из теоремы 2. Используя непрерывность  $V$ , мы немедленно получаем, что если  $\chi_{E_1}$  — индикатор множества  $E_1 \subset \mathcal{M}_1$ , то  $\chi_{E_1}^{(2)} = \chi_{E_1}$  и  $(V\chi_{E_1})^2 = V\chi_E$ , т. е.  $V\chi_{E_1} = \chi_{E_2}$  для некоторого

$E_2 \subset \mathcal{M}_2$ . Унитарность  $V$  влечет равенство  $\mu_1(E_1) = \mu_2(E_2)$ . Точно так же  $V(\chi_{E_1} \chi_{E_1^c}) = V(\chi_{E_1} \chi_{E_1^c}) = V(\chi_{E_1}) \cdot V(\chi_{E_1^c})$ . Общее утверждение теории пространств Лебега гласит, что любой изоморфизм гильбертовых пространств  $L^2(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ ,  $L^2(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$  с описанными свойствами всегда индуцирован изоморфизмом измеримых пространств  $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ ,  $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ , что и утверждалось.

**Теорема 4.** Для любой счетной подгруппы  $\Lambda \subset S^1$  существует эргодический автоморфизм  $T$ , для которого  $\Lambda_{\text{pp}}(T) = \Lambda$ .

**Доказательство.** Мы снова воспользуемся теорией двойственности Понтрягина для абелевых групп. Обозначим через  $M$  группу характеров группы  $\Lambda$ , которая является компактной сепарабельной абелевой группой. Возьмем точку  $a \in M$ , для которой  $a(\lambda) = \lambda$ . Тогда группа сдвигов  $T_a x = x + a$  обладает требуемым свойством, что и требовалось доказать.

**Следствие.** Каждый эргодический автоморфизм с чисто точечным спектром изоморфен эргодическому групповому сдвигу.

Сейчас будет описано обобщение всей теории на случай непрерывного времени. Пусть  $\{S^t\}$  — поток на пространстве Лебега  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Обозначим через  $\Lambda_{\text{pp}}(\{S^t\})$  множество точек  $\lambda \in \mathbf{R}^1$  таких, что можно найти  $f_\lambda \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ , для которой  $f_\lambda(S^t x) = U^t f_\lambda(x) = e^{i\lambda t} f_\lambda(x) \pmod{0}$ . Множество  $\Lambda_{\text{pp}}(\{S^t\})$  также называется чисто точечной компонентой спектра индуцированной группы  $\{U^t\}$  унитарных операторов гильбертова пространства  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

**Теорема 5.** Предположим, что группа  $\{T^t\}$  эргодична. Тогда:

- 1) для каждой нормированной собственной функции  $f_\lambda$  выполнено равенство  $|f_\lambda| = 1 \pmod{1}$ ;
- 2) каждое подпространство  $H_\lambda$  одномерно;
- 3) множество  $\Lambda_{\text{pp}}(\{S^t\})$  — счетная подгруппа в  $\mathbf{R}^1$ .

Доказательство этой теоремы такое же, как и доказательство теоремы 1.

**Определение 2.** Поток  $\{S^t\}$  называется потоком с чисто точечным спектром, если множество собственных функций  $\{f_\lambda\}$ ,  $\lambda \in \Lambda_{\text{pp}}(\{S^t\})$ , образует базис в  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

**Теорема 6** (фон Нейман [2]). Два эргодических потока  $\{S_1^t\}$ ,  $\{S_2^t\}$  с чисто точечным спектром изоморфны тогда и только тогда, когда  $\Lambda_{\text{pp}}(\{S_1^t\}) = \Lambda_{\text{pp}}(\{S_2^t\})$ .

Пусть  $M$  — компактная абелева группа,  $\mu$  — ее мера Хаара и  $\{a_t\}$  — однопараметрическая подгруппа  $M$ . Введем поток  $\{S^t\}$  на  $M$  по формуле  $S^t x = x + a_t$ . Этот поток называется потоком групповых сдвигов. Обозначим через  $M'$  группу характеров

группы  $M$ . Для каждого  $\chi \in M'$  мы имеем  $\chi(a_{t+s}) = \chi(a_t) \cdot \chi(a_s)$ , т. е.  $\chi(a_t) = e^{i\lambda_t}$ . В результате мы получаем функцию  $\lambda_\chi$ , определенную на  $M'$ . Из группового свойства вытекает тот факт, что  $\lambda_\chi$  есть гомоморфизм  $M'$  в  $\mathbb{R}^1$ .

**Теорема 7.** Поток  $\{S^t\}$  эргодичен тогда и только тогда, когда  $\lambda_\chi$  является мономорфизмом  $M'$  в  $\mathbb{R}^1$ , т. е.  $\lambda_\chi$  отображает группу  $M'$  взаимно-однозначно на ее образ.

**Доказательство.** Если ядро отображения  $\lambda_\chi$  не тривиально, то существует нетривиальный характер  $\chi_0$ , для которого  $\lambda_{\chi_0} = 0$ . Это в свою очередь означает, что  $\chi_0$  — инвариантная функция, т. е. поток  $\{S^t\}$  неэргодичен.

Пусть теперь  $\lambda_\chi$  есть мономорфизм и  $h \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$  — инвариантная функция. Тогда  $h = \sum c_\chi \cdot \chi$  и

$$U^t h = \sum c_\chi e^{i\lambda_\chi t} \chi = \sum c_\chi \chi \quad (\text{п.в.}),$$

т. е.  $c_\chi = 0$ , если только  $\chi \neq 1$ . А это и требовалось доказать.

Точно так же, как и в случае автоморфизмов, можно показать, что поток  $\{S^t\}$  есть поток с чисто точечным спектром и  $\Lambda_{pp}(\{S^t\}) = \lambda(M')$ , т. е.  $\Lambda_{pp}(\{S^t\})$  является множеством чисел  $\lambda_\chi$ .

**Теорема 8.** Для каждой счетной подгруппы  $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$  существует эргодический поток  $\{S^t\}$  с чисто точечным спектром такой, что  $\Lambda_{pp}(\{S^t\}) = \Lambda$ .

**Доказательство.** Пусть  $M$  — группа характеров группы  $\Lambda$ , которая по теореме двойственности Понтрягина есть локально-компактная абелева группа,  $m$  — ее мера Хаара. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу  $\{a_t\}$  в  $M$ , для которой  $a_t(\lambda) = e^{2\pi i \lambda t}$ . Поток группы сдвигов вдоль подгруппы  $\{a_t\}$  удовлетворяет всем необходимым условиям, что доказывает теорему.

**Следствие.** Каждый эргодический поток  $\{S^t\}$  с чисто точечным спектром изоморфен потоку групповых сдвигов вдоль некоторой компактной абелевой группы.

Сейчас мы рассмотрим один важный пример. Возьмем  $k$  рационально независимых чисел  $\omega_1, \dots, \omega_k$ , т. е. таких, что равенство  $\sum_{i=1}^k m_i \omega_i = 0$  с целыми  $\{m_i\}$  возможно только при

$$m_1 = \dots = m_k = 0. \quad \text{Рассмотрим подгруппу } \Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \omega_i \right\} \subset \mathbb{R}^1.$$

Условие рациональной независимости означает, что  $\Lambda$  изоморфна обычной решетке  $\mathbb{Z}^k$ . Группа характеров  $\mathbb{Z}^k$  есть  $k$ -мерный тор  $\text{Tor}^k$ . Введем циклические координаты  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  на этом торе и поток  $\{S^t\}$ ,  $S^t(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = (\varphi_1 + \omega_1 t, \dots, \varphi_k + \omega_k t)$ . Тогда  $\{S^t\}$  является потоком с чисто точечным спектром на  $\text{Tor}^k$ .

Этот пример важен в связи с понятием интегрируемой системы в классической механике и известной КАМ-теории, где такие потоки действуют на эргодических компонентах. Допустим, что имеется гамильтонова система с  $n$  степенями свободы, у которой функция Гамильтона  $H(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = H(p, q)$ . В некоторых случаях эта система имеет еще и  $(n-1)$  других интегралов движения  $I_1(p, q), \dots, I_{n-1}(p, q)$  таких, что все интегралы  $I = H, I_1, \dots, I_{n-1}$  находятся в инволюции, т. е. все скобки Пуассона  $\{I_i, I_j\} = 0$ . Геометрически это означает, что если рассмотреть гамильтоновы потоки, порожденные функциями  $I_k, 0 \leq k \leq n-1$ , то они коммутируют между собой. Динамические системы, отвечающие таким  $H$ , называются интегрируемыми потоками. Имеется много важных примеров интегрируемых систем. Некоторые из них были открыты совсем недавно с помощью так называемого метода обратной задачи теории рассеяния.

Хорошо известна теорема Лиувилля—Арнольда, утверждающая, что при выполнении некоторых условий невырожденности фиксирование значений интегралов в инволюции  $I_0 = \text{const}_0, I_1 = \text{const}_1, \dots, I_{n-1} = \text{const}_{n-1}$  определяет инвариантное подмногообразие исходного гамильтонова потока. Если это подмногообразие компактно, то оно является тором, а индуцированный поток изоморфен потоку сдвигов на  $n$ -мерном торе. Можно сказать также, что в типичной ситуации все (mod 0) эргодические компоненты интегрируемого гамильтонова потока являются потоками на торах с чисто точечным спектром. Это и объясняет важность динамических систем с чисто точечным спектром. Основная теорема теории КАМ утверждает, что при малом возмущении интегрируемой гамильтоновой системы в фазовом пространстве остается множество большой меры, состоящее из инвариантных  $n$ -мерных торов, на каждом из которых гамильтонова система изоморфна потоку с чисто точечным спектром.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

Изложение в этой лекции следует монографии

[1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.

Теорема фон Неймана изложена в его работе

[2] Neumann J. v. n. Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik // Ann. Math.— 1932.— V. 33.— P. 587—642.

Теорему Лиувилля—Арнольда можно найти в книге Арнольда

[3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.

## ЧАСТЬ II

# ЭНТРОПИЙНАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Энтропийная теория динамических систем представляет собой практически завершённый раздел общей эргодической теории. В этой части мы излагаем основные факты этой теории, достаточные для большинства приложений.

## ЛЕКЦИЯ 6

### ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЭНТРОПИИ. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНТРОПИИ

Понятие энтропии возникает в статистической механике, теории информации и теории динамических систем. Во всех этих случаях за исключением одного, встречающегося в теории кинетического уравнения Больцмана, это понятие имеет одну и ту же структуру.

Энтропийная теория динамических систем начинается с введения энтропии разбиения. Предположим, что имеется конечное или счётное разбиение пространства Лебега  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  на подмножества  $C_i$ ,  $\xi = \{C_1, C_2, \dots\}$ .

Определение 1. Сумма  $H(\xi) = -\sum \mu(C_i) \ln \mu(C_i)$  называется энтропией разбиения  $\xi$ . Для всех остальных разбиений  $\xi$  энтропия  $H(\xi) = \infty$ .

Пространство всех конечных или счётных разбиений  $\xi$  с  $H(\xi) < \infty$  обозначается  $Z$ . Два разбиения играют специальную роль во всей теории: разбиение  $\varepsilon$  пространства  $M$  на отдельные точки и тривиальное разбиение  $\nu$ , единственным элементом которого является все пространство. Ясно, что  $H(\nu) = 0$ ,  $H(\varepsilon) = \infty$ .

Если  $\xi$  и  $\eta$  — два измеримых разбиения, то  $\xi$  индуцирует измеримое разбиение на почти каждом  $C_\eta$ . Энтропия  $H(\xi|C_\eta)$  называется условной энтропией разбиения  $\xi$  на элементе  $C_\eta$ .

Определение 2.  $H(\xi|\eta) = \int_{M|\eta} H(\xi|C_\eta) d\mu$  называется условной энтропией разбиения  $\xi$  при условии  $\eta$ .

Лемма 1.  $H(\xi|\eta) \leq H(\xi)$ . В случае  $H(\xi) < \infty$  равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\xi$  и  $\eta$  независимы.

**Доказательство.** Будет рассмотрен только случай счетного разбиения  $\xi$ . Предположим, что  $\xi = \{C_1, C_2, \dots\}$ . Тогда

$$H(\xi|\eta) = \sum_i \left[ - \int_{M|\eta} (\mu(C_i|C_\eta) \ln \mu(C_i|C_\eta)) d\mu \right].$$

Учитывая формулу полной вероятности  $\int_{M|\eta} \mu(C_i|C_\eta) d\mu = \mu(C_i)$ , а также выпуклость функции  $y = -x \ln x$ , с помощью неравенства Иенсена устанавливаем немедленно, что

$$- \int_{M|\eta} (\mu(C_i|C_\eta) \ln \mu(C_i|C_\eta)) d\mu \leq -\mu(C_i) \ln \mu(C_i).$$

Равенство имеет место лишь в случае, когда  $\mu(C_i|C_\eta)$  не зависит от  $C_\eta \pmod{0}$ . Лемма 1 доказана.

Следующие соотношения являются прямыми следствиями определений и леммы 1.

$$1^\circ H(\xi \vee \eta) = H(\xi) + H(\eta|\xi) \leq H(\xi) + H(\eta).$$

$$2^\circ H(\xi \vee \eta|\zeta) = H(\xi|\zeta) + H(\eta|\xi \vee \zeta) \leq H(\xi|\zeta) + H(\eta|\zeta).$$

$$3^\circ H(\xi|\eta_1) \leq H(\xi|\eta_2), \text{ если } \eta_1 \geq \eta_2.$$

Условная энтропия обладает также некоторыми свойствами непрерывности, перечисляемыми ниже.

$$4^\circ \text{ Если } \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots, \xi = \bigvee_i \xi_i, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi_n|\eta) = H(\xi|\eta).$$

$$5^\circ \text{ Если } \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots, \xi = \bigwedge_i \xi_i \text{ и } H(\xi_k|\eta) < \infty \text{ для по крайней}$$

мере одного  $k$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi_n|\eta) = H(\xi|\eta)$ .

$$6^\circ \text{ Если } \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots, \eta = \bigvee_n \eta_n \text{ и } H(\xi|\eta_k) < \infty \text{ для по крайней}$$

мере одного  $k$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi|\eta_n) = H(\xi|\eta)$ .

$$7^\circ \text{ Если } \eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots, \eta = \bigwedge_n \eta_n, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi|\eta_n) = H(\xi|\eta).$$

Все эти свойства доказываются с помощью теоремы Дуба о сходимости условных вероятностей. Мы опускаем здесь эти доказательства.

Предположим теперь, что  $T$  — эндоморфизм пространства  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

**Лемма 2.** Для произвольного  $\xi \in Z$  существует предел

$$h(T, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi).$$

Доказательство. Используя 2° и инвариантность меры  $\mu$ , имеем

$$\begin{aligned} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) &= \\ &= H(T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) + H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) = \\ &= H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi) + H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) = \\ &= \dots = H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) + H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi) + \\ &\quad + H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+2}\xi) + \dots + H(\xi | T^{-1}\xi) + H(\xi). \end{aligned}$$

Положим

$$\xi^- = T^{-1}\xi \vee T^{-2}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi \vee \dots, \quad \xi^+ = T\xi \vee T^2\xi \vee \dots$$

Из 6° следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) = H(\xi | \xi^-),$$

а тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi)}{n+1} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n H(\xi | T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^k\xi) = \\ &= H(\xi | \xi^-) = h(T, \xi). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Иногда  $h(T, \xi)$  называют энтропией разбиения  $\xi$  на единицу времени (по отношению к  $T$ ). Если  $\xi_1 \leq \xi_2$ , то  $h(T, \xi_1) \leq h(T, \xi_2)$  (используется свойство 1°).

Определение 3.  $\sup_{\xi \in Z} h(T, \xi) = h(T)$  называется метрической энтропией, или просто энтропией эндоморфизма  $T$ .

Очевидно, что  $0 \leq h(T) \leq \infty$  и  $h(T)$  — метрический инвариант эндоморфизма  $T$ . Рассмотрим некоторые свойства  $h(T)$ .

Теорема 1. а) Если  $T$  — автоморфизм, то  $h(T) = h(T^{-1})$ .

б) Для любого эндоморфизма  $T$  и любого  $k \geq 1$

$$h(T^k) = k \cdot h(T).$$

Доказательство. Утверждение а) следует непосредственно из равенства

$$H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) = H(T^n\xi \vee T^{n-1}\xi \vee \dots \vee \xi),$$

которое в действительности дает  $h(T, \xi) = h(T^{-1}, \xi)$  для любого  $\xi$ .

Чтобы доказать б), заметим сначала, что

$$h(T, \xi) = \frac{1}{k} h(T^k, \xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-k+1}\xi).$$

Отсюда немедленно получаем неравенство  $h(T) \leq \frac{1}{k} h(T^k)$ .

Чтобы получить противоположное неравенство, предположим, что  $h(T^k) < \infty$ , и возьмем такое  $\xi$ , что  $h(T^k, \xi) > h(T^k) - \varepsilon$ . Тогда для  $\xi_1 = \xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-k+1}\xi$  имеем  $\xi_1 \geq \xi$  и, следовательно,  $h(T^k, \xi_1) \geq h(T^k) - \varepsilon$ . С другой стороны,

$$h(T) \geq h(T, \xi) = \frac{1}{k} h(T^k, \xi_1) \geq \frac{1}{k} h(T^k) - \varepsilon,$$

что в силу произвольности выбора  $\varepsilon > 0$  дает  $h(T) \geq \frac{1}{k} h(T^k)$ .

В случае, когда  $h(T^k) = \infty$ , рассуждения аналогичны. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь непрерывный поток  $\{S^t\}$ . Теорема 1 дает нам равенство  $h(S^{t_1}) = \frac{|t_1|}{|t_2|} h(S^{t_2})$  при рациональном отношении  $t_1/t_2$ . Покажем, что последнее равенство справедливо при всех  $t_1/t_2$ .

**Теорема 1'.** Если  $\{S^t\}$  — непрерывный поток, то для всех  $t_1, t_2$

$$\frac{1}{|t_1|} h(S^{t_1}) = \frac{1}{|t_2|} h(S^{t_2}).$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно допустить, что  $t_1, t_2 > 0$ . Возьмем произвольное разбиение  $\xi \in Z$  и для каждого натурального  $r$  положим

$$\xi_r = \xi \vee S^{-t_1/r} \xi \vee S^{-2t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-(r-1)t_1/r} \xi.$$

Тогда для любого  $r$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t_1|} h(S^{t_1}) &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1)t_1} H(\xi \vee S^{-t_1/r} \xi \vee S^{-2t_1/r} \xi \vee \dots \\ &\quad \dots \vee S^{-mt_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r}t_1} \xi). \quad (1) \end{aligned}$$

Далее:

$$\frac{1}{|t_2|} h(S^{t_2}, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)t_2} H(\xi \vee S^{-t_2} \xi \vee \dots \vee S^{-nt_2} \xi) \leq$$



$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)t_2} H(\xi \vee S^{-t_2} \xi \vee \dots \vee S^{-nt_2} \xi \vee \xi \vee \\ \vee S^{-t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r} t_1} \xi), \quad (2)$$

где  $m=m(n)$  выбрано таким образом, что  $mt_1 \geq nt_2$  и  $\frac{mt_1}{nt_2} \rightarrow 1$ .

В таком случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)t_2} H(\xi \vee S^{-t_2} \xi \vee \dots \vee S^{-nt_2} \xi) &\leq \\ &\leq \frac{(m+1)t_1}{(n+1)t_2} \cdot \frac{1}{(m+1)t_1} H(\xi \vee S^{-t_2} \xi \vee \dots \vee S^{-nt_2} \xi \vee \\ &\vee \xi \vee S^{-t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r} t_1} \xi) = \\ &= \frac{(m+1)t_1}{(n+1)t_2} \cdot \frac{1}{(m+1)t_1} H(\xi \vee S^{-t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r} t_1} \xi) + \\ &+ \frac{(m+1)t_1}{(n+1)t_2} \cdot \frac{1}{(m+1)t_1} H(\xi \vee S^{-t_2} \vee \dots \vee S^{-nt_2} \xi | \xi \vee \\ &\vee S^{-t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r} t_1} \xi). \quad (3) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем выражении стремится к  $\frac{1}{t_1} h(S^{t_1}, \xi_r)$ . Из 2° легко получаем, что

$$\begin{aligned} H(\xi \vee S^{-t_2} \xi \vee \dots \vee S^{-nt_2} \xi | \xi \vee S^{-t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r} t_1} \xi) &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n H(S^{-kt_2} \xi | \xi \vee S^{-t_1/r} \xi \vee \dots \vee S^{-mt_1 - \frac{r-1}{r} t_1} \xi). \end{aligned}$$

Для каждого  $k$  можно найти такое целое  $p_k$ , что  $|kt_2 - \frac{p_k}{r} t_1| \leq \frac{1}{r}$ .

А тогда из 3° следует, что последняя сумма не превосходит

$$\sum_{k=0}^n H(S^{-kt_2} \xi | S^{-(p_k/r)t_1} \xi) = \sum_{k=0}^n H(S^{(p_k/r)t_1 - kt_2} \xi | \xi). \quad (4)$$

Из непрерывности потока  $\{S^t\}$  (см. лекцию 1) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $r$ , что  $H(S^{\tau} \xi | \xi) \leq \varepsilon$ , если  $|\tau| \leq 1/r$ . Следовательно, сумма (4) может быть сделана меньше, чем  $\varepsilon \cdot n$ , при условии, что  $r$  достаточно велико.

Используя (1), (2), (3), (4), имеем

$$\frac{1}{t_2} h(S^{t_2}) = \sup_{\xi} \frac{1}{t_2} h(S^{t_2}, \xi) \leq \sup_{t_1} \frac{1}{t_1} h(S^{t_1}, \xi_r) + \frac{\varepsilon}{t_1} \leq \frac{1}{t_1} h(S^{t_1}) + \frac{\varepsilon}{t_1}.$$

Но  $\varepsilon$  может быть выбрано сколь угодно малым. Следовательно,  $\frac{1}{t_2} h(S^{t_2}) \leq \frac{1}{t_1} h(S^{t_1})$ . Заменяя  $t_1$  на  $t_2$ , получаем также и обратное неравенство. Это дает равенство  $\frac{1}{t_1} h(S^{t_1}) = \frac{1}{t_2} h(S^{t_2})$ , что и требовалось доказать.

На основании теоремы 1' определим энтропию потока  $\{S^t\}$  как энтропию автоморфизма  $S^1$ .

**Теорема 2.** Если  $h(T) > 0$ , то в гильбертовом пространстве  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$  можно найти бесконечную последовательность нормированных векторов  $\{f_i\}$  такую, что  $U_T^n f_i \perp U_T^m f_j$  при  $|n-m| + |i-j| \neq 0$ . Это означает, что спектр оператора  $U_T$  содержит счетнократную лебеговскую компоненту.

**Следствие.** Если  $T$  — эргодический автоморфизм с чисто точечным или сингулярным спектром, то  $h(T) = 0$ .

**Доказательство** теоремы 2. Если  $h(T) > 0$ , то существует такое  $\xi \in Z$ , что  $h(T, \xi) = H(\xi | \xi^-) > 0$ . Обозначим через  $A \in \mathcal{M}(\xi^-)$  множество тех  $C_{\xi^-}$ , для которых  $H(\xi | C_{\xi^-}) > 0$ . Тогда  $\mu(A) > 0$  и из теории измеримых разбиений следует, что можно найти функцию  $\chi(x)$ , измеримую относительно  $\mathcal{M}(\xi \vee \xi^-)$ , для которой

$$\chi(x) = 0 \text{ для } x \in \bar{A};$$

$$\int \chi(x) d\mu(x | C_{\xi^-}) = 0,$$

$$\int_{C_{\xi^-}} \chi^2(x) d\mu(x | C_{\xi^-}) = 1 \text{ для } x \in A.$$

Возьмем бесконечную последовательность  $g_i$  ограниченных нормированных (в смысле пространства  $L^2$ ) измеримых функций, для которых  $g_i(x) = 0$  при  $x \in \bar{A}$ , каждая  $g_i$  измерима относительно  $\mathcal{M}(\xi^-)$  и  $g_i \perp g_j$  при  $i \neq j$ . Положим  $f_i = \chi \cdot g_i$  и покажем, что последовательность  $\{f_i\}$  обладает всеми нужными свойствами.

Ясно, что  $(U_T^n f_i, U_T^m f_j) = (f_i, f_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим  $(U_T^n f_i, U_T^m f_j)$  и будем считать, что  $n > m$ . Тогда  $(U_T^n f_i, U_T^m f_j) = (U_T^{n-m} f_i, f_j)$ . Нетрудно получить из определений, что  $U_T^{n-m} f_j$  измерима относительно  $\mathcal{M}(\xi^-)$ , если  $n-m > 0$ . А тогда

$$\int_M U_T^{n-m} f_i(x) f_j(x) d\mu = \int_{M \setminus \xi^-} U_T^{n-m} f_i \cdot g_j \int_{C_{\xi^-}} \chi(x) d\mu(x | C_{\xi^-}) = 0.$$

Тот факт, что  $f_j$  — нормированный вектор, следует из аналогичных рассуждений. Теорема 2 доказана.

До сих пор мы не рассматривали задачу о вычислении энтропии. Следующая теорема весьма важна для этой цели.

**Теорема 3.** Пусть  $T$  — автоморфизм и  $\xi \in Z$  — образующее разбиение, т. е.  $\mathcal{M}(\bigvee_k T^k \xi) = \mathcal{M}$ . Тогда  $h(T) = h(T, \xi)$ .

**Доказательство.** Мы должны показать, что для произвольного  $\xi' \in Z$  справедливо неравенство  $h(T, \xi') \leq h(T, \xi)$ . Из свойства 4° получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H(\xi' | \bigvee_{|k| \leq m} T^k \xi) = 0.$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $m = m(\varepsilon)$ , для которого

$$H(\xi' | \bigvee_{|k| \leq m} T^k \xi) \leq \varepsilon.$$

Используя 3°, 1°, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} H(\xi' \vee T^{-1} \xi' \vee \dots \vee T^{-n} \xi') &\leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} H(\xi' \vee T^{-1} \xi' \vee \dots \vee T^{-n} \xi' \vee T^m \xi \vee \\ &\quad \vee T^{m-1} \xi \vee \dots \vee T^{-n-m} \xi) \leq \\ &\leq \frac{n+2m+1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2m+1} H(T^m \xi \vee T^{m-1} \xi \vee \dots \vee T^{-n-m} \xi) + \\ &\quad + \frac{1}{n+1} H(\xi' \vee \dots \vee \xi T^{-n} \xi' | T^m \xi \vee \dots \vee T^{-n-m} \xi). \end{aligned}$$

При фиксированном  $m$  первое слагаемое стремится к  $h(T, \xi)$ . Используя 2°, 3°, оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} H(\xi' \vee \dots \vee T^{-n} \xi' | T^m \xi \vee \dots \vee T^{-n-m} \xi) &\leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n H(T^{-k} \xi' | T^m \xi \vee \dots \vee T^{-n-m} \xi) \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n H(T^{-k} \xi' | \bigvee_{|i-k| \leq m} T^i \xi) = H(\xi' | \bigvee_{|i| \leq m} T^i \xi) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак,  $h(T, \xi') \leq h(T, \xi) + \varepsilon$ . Это неравенство дает, в силу произвольности  $\varepsilon$ , утверждение теоремы.

Теорема 3 имеет несколько полезных обобщений. Рассмотрим одно из них, не требующее каких-либо изменений в доказательстве.

Теорема 3'. Пусть  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots$  и  $\bigcup_i \overline{\mathcal{M}(\bigvee_n T^n \xi_i)} = \mathcal{M}$ . Тогда  $h(T, \xi_i) \rightarrow h(T)$  при  $i \rightarrow \infty$ .

Теорема 3', в частности, применима, когда  $\bigcup_i \overline{\mathcal{M}(\xi_i)} = \mathcal{M}$ .

Перейдем теперь к некоторым примерам вычисления энтропии.

Пусть  $T$  — сдвиг Бернулли, действующий на пространстве  $M$  бесконечных в обе стороны последовательностей  $\omega = \{\omega_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ , где  $\omega_i \in X$  и имеет распределение  $\pi$ .

Теорема 4. Если распределение  $\pi$  не дискретно, то  $h(T) = \infty$ . Если же  $\pi$  дискретно, т. е.  $\pi = \{\pi_i\}$ , то  $h(T) = -\sum_i \pi_i \ln \pi_i$ .

Доказательство. Будет рассмотрен только случай дискретного распределения; оставшийся случай предоставляется рассмотреть читателю самостоятельно. Если  $X = \{x_i\}$ ,  $\pi_i = \pi(x_i)$  и  $-\sum_i \pi_i \ln \pi_i < \infty$ , то рассмотрим образующее разбиение  $\xi = \{C_1, C_2, \dots\}$ , для которого  $C_i = \{\omega \mid \omega_0 = -x_i\}$ . Тогда из определения меры Бернулли

$$\begin{aligned} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi) &= H(\xi) + H(T^{-1}\xi) + \dots + H(T^{-n}\xi) = \\ &= (n+1)H(\xi), \end{aligned}$$

что и дает требуемый результат. Если же  $-\sum_i \pi_i \ln \pi_i = \infty$ , то рассмотрим возрастающую последовательность разбиений  $\xi_r = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ , где  $C_i = \{\omega \mid \omega_0 = x_i\}$  для  $1 \leq i \leq r$  и  $C_r = \{\omega \mid \omega_0 = x_j \text{ при } j \geq r\}$ . Теперь, чтобы получить искомый результат, достаточно применить теорему 3'. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если  $T', T''$  — сдвиги Бернулли, которым отвечают дискретные распределения  $\pi', \pi''$ , и  $\sum \pi'_i \ln \pi'_i \neq \sum \pi''_i \ln \pi''_i$ , то  $T'$  и  $T''$  не изоморфны. В частности, если  $\pi'_i = 1/r'$ ,  $1 \leq i \leq r'$ , и  $\pi''_i = 1/r''$ ,  $1 \leq i \leq r''$ ,  $r' \neq r''$ , то соответствующие сдвиги Бернулли не изоморфны.

Если  $h(T') = h(T'')$ , то  $T'$  и  $T''$  метрически изоморфны. Это важное утверждение было доказано Д. Орнштейном (см. 3° в конце лекции).

Рассмотрим теперь сдвиг Маркова в пространстве последовательностей  $\omega = \{\omega_i\}$ , где  $\omega_i \in X$ ,  $X$  — конечное множество,  $\|p_{ij}\| = P$  — матрица вероятностей перехода,  $\pi$  — стационарное распределение. Тогда  $h(T) = -\sum_i \pi_i \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}$ . Доказательство этого факта проводится тем же способом, что и доказательство теоремы 4.

Сдвиги Бернулли и сдвиги Маркова, имеющие конечную энтропию, определяются однозначно следующими свойствами:

$T$ —сдвиг Бернулли тогда и только тогда, когда существует образующее разбиение  $\xi \in \mathcal{Z}$ , для которого  $h(T) = H(\xi | \xi^-) = H(\xi)$ ;

$T$ —сдвиг Маркова тогда и только тогда, когда существует образующее разбиение  $\xi \in \mathcal{Z}$ , для которого  $h(T) = H(\xi | \xi^-) = H(\xi | T^{-1}\xi)$ . Оба эти свойства легко вытекают из неравенства Йенсена.

Другой пример автоморфизма с положительной энтропией доставляет групповой автоморфизм двумерного тора  $M = \text{Тор}^2$  (см. лекцию 3). Предположим, что  $T$  задается  $(2 \times 2)$ -матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbf{Z}^1, \quad \det A = \pm 1, \quad \text{имеющей два собственных}$$

значения  $\lambda_1$ ,  $|\lambda_1| > 1$ , и  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$ . Обозначим отвечающие им собственные векторы через  $e_1$  и  $e_2$ . В лекции 3 было показано, что  $T$  имеет конечное марковское разбиение  $\xi = \{C_1, \dots, C_r\}$  и изоморфно конечному сдвигу Маркова.

**Теорема 6.**  $h(T) = \ln |\lambda_1|$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} h(T) &= -\sum \mu(C_i) \sum \frac{\mu(C_i \cap T^{-1}C_j)}{\mu(C_i)} \ln \frac{\mu(C_i \cap T^{-1}C_j)}{\mu(C_i)} = \\ &= -\sum \mu(C_i \cap T^{-1}C_j) [\ln \mu(C_i \cap T^{-1}C_j) - \ln \mu(C_i)]. \end{aligned}$$

Из свойства марковского разбиения следует, что

$$\mu(C_i \cap T^{-1}C_j) = \mu(C_i) \cdot |\lambda_2| l(\gamma^{(w)}(C_j)) / l(\gamma^{(w)}(C_i)).$$

Подставляя это выражение в формулу для  $h(T)$ , получаем

$$\begin{aligned} h(T) &= -\sum \mu(C_i \cap T^{-1}C_j) [\ln \mu(C_i) + \ln |\lambda_2| + \\ &\quad + \ln l(\gamma^{(w)}(C_i)) - \ln l(\gamma^{(w)}(C_j)) - \ln \mu(C_i)] = \\ &= -\ln |\lambda_2| - \sum \mu(C_i \cap T^{-1}C_j) \ln l(\gamma^{(w)}(C_i)) + \\ &\quad + \sum \mu(C_i \cap T^{-1}C_j) \ln l(\gamma^{(w)}(C_j)) = -\ln |\lambda_2| = \ln |\lambda_1|. \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

Следующий пример показывает, что в ряде случаев значение энтропии можно найти, не исследуя детально свойств динамики. Рассмотрим билиарды в многогранниках  $Q$ . В двумерном случае  $Q$ —это многоугольник. Билиардный поток  $\{S^+\}$  соответствует движению точки внутри  $Q$  с постоянной скоростью  $v$ ,  $|v|=1$ , и упругими отражениями от границы. При таких отражениях нормальная составляющая скорости меняет знак, а тангенциальная составляющая

сохраняется. Фазовое пространство билиардного потока есть прямое произведение  $Q$  и  $S^{n-1}$ , где  $S^{n-1}$  есть единичная  $(n-1)$ -мерная сфера, т. е.  $M = Q \times S^{n-1}$ . Поток  $\{S^t\}$  сохраняет меру  $\mu$ ,  $d\mu = dq \cdot d\omega$ , где  $d\omega$  есть мера Лебега на  $S^{n-1}$ . Приведенное описание годится, разумеется, и для билиардов внутри произвольных областей евклидова пространства с кусочно-гладкой границей (см. лекцию 16).

Теорема 7.  $h(\{S^t\}) = 0$ .

Доказательство. Мы проведем подробное доказательство для двумерного случая. В многомерном случае рассуждения аналогичны.

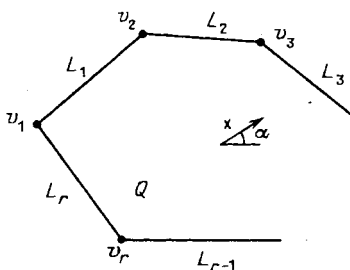


Рис. 6.1

Нарисуем замкнутую область  $Q$ , ограниченную многоугольником  $P$ , состоящим из отрезков  $L_1, L_2, \dots, L_r$  (см. рис. 6.1) и вершин  $v_1, \dots, v_r$ .

Фазовое пространство  $M$  состоит из единичных векторов  $x$ , касательных к  $Q$ , т. е. имеющих начало в точках  $q \in Q$ . Рассмотрим конечное разбиение  $\xi = \{C_1, \dots, C_l\}$ , элементы которого имеют вид  $C_i = \tilde{C}_i \times \Delta_i$ , причем граница

$\partial \tilde{C}_i$  пересекается не более чем с одним отрезком  $L_k$ . Здесь  $\Delta_i$  — интервал на окружности возможных направлений  $\alpha$ , т. е.  $a \leq \alpha \leq b$ , и  $\tilde{C}_i$  есть область в  $Q$ , ограниченная некоторым многоугольником. Мы покажем, что для каждого такого  $\xi$  энтропия  $h(S^1, \xi) = 0$ ; согласно теореме 3' этого будет достаточно для наших целей.

Для каждого  $n$  возьмем окрестности  $O_n(\partial C_i)$  границ  $\partial C_i$  радиусов  $\frac{1}{n^3}$  и положим  $O_n = \bigcup_i O_n(\partial C_i)$ . Тогда

$$\mu(O_n(\partial C_i)) \leq \frac{\text{const}}{n^3}, \quad \mu(O_n) \leq \frac{\text{const}}{n^3}.$$

Здесь и далее  $\text{const}$  есть число, которое не зависит от  $n$ , но, быть может, зависит от  $\xi$ . Если

$$A_n = \{x \in M \mid S^k x \notin O_n, \quad 0 \leq k \leq n\},$$

то, очевидно,  $\mu(A_n) \geq 1 - \frac{\text{const}}{n^2}$ . Введем также

$$B_n = \left\{ x \in M \mid \text{dist} \left\{ \bigcup_{0 \leq i \leq n} S^i x, \bigcup_i v_i \right\} \geq \frac{1}{n^3} \right\}.$$

Нетрудно показать, что  $\mu(B_n) \geq 1 - \frac{\text{const}}{n^2}$ . До сих пор мы не использовали, по существу, свойств динамики. Используем их теперь, заметив, что если  $x \in A_n \cap B_n$  и  $U_n(x)$  — окрестность точки  $x$  радиуса  $\frac{1}{2n^4}$ , то каждая точка  $y \in U(x)$  принадлежит тому же самому элементу разбиения  $\xi \vee S^{-1}\xi \vee \dots \vee S^{-n}\xi$ , что и  $x$ .

Действительно, мы можем найти  $y'$  такой, что  $x, y'$  параллельны и  $y, y'$  выходят из одной и той же точки  $q \in Q$ . Сначала мы покажем, что  $x, y'$  обладают необходимыми свойствами, и затем докажем это же для  $y, y'$ .

Траектории, определяемые  $x, y'$ , параллельны при условии, что они отражаются от одних и тех же отрезков границы. Но последнее следует из включения  $x \in B_n$ . Таким образом,  $\text{dist}(S^k x, S^k y') = \text{dist}(x, y')$ , и требуемое свойство следует из того, что  $x \in A_n$ . Здесь используется свойство прямолинейности границы. Расстояние между  $S^t y', S^t y$  растет линейно по  $t$  при условии, что траектории  $S^t y', S^t y, 0 \leq t \leq h$ , отражаются от одних и тех же сторон  $L_i$ . Но это снова следует из включения  $x \in A_n \cap B_n$ .

Мы имеем теперь

$$H(\xi \vee S^{-1}\xi \vee \dots \vee S^{-n}\xi) = -\sum \mu(C_i^{(n)}) \ln \mu(C_i^{(n)}) = \\ = -\sum' \mu(C_i^{(n)}) \ln \mu(C_i^{(n)}) - \sum'' \mu(C_i^{(n)}) \ln \mu(C_i^{(n)}) = \sum' + \sum''.$$

Здесь  $C_i^{(n)}$  — элементы разбиения  $\xi \vee S^{-1}\xi \vee \dots \vee S^{-n}\xi$  и суммирования  $\sum'$  ( $\sum''$ ) производятся по таким  $C_i^{(n)}$ , для которых  $\mu(C_i^{(n)} \cap A_n \cap B_n) > 0$  ( $\mu(C_i^{(n)} \cap A_n \cap B_n) = 0$ ). Как следует из предыдущего замечания, для  $C_i^{(n)} \in \sum'$  имеем  $\mu(C_i^{(n)}) \geq \frac{\text{const}}{n^4}$  и, таким образом,

$$-\sum' \mu(C_i^{(n)}) \ln \mu(C_i^{(n)}) \leq \text{const} \cdot \ln n.$$

Далее,  $\sum'' \mu(C_i^{(n)}) = \varepsilon_n \leq \mu(M \setminus (A_n \cap B_n))$  и

$$-\sum'' \mu(C_i^{(n)}) \ln \mu(C_i^{(n)}) = \\ = \varepsilon_n \left[ -\sum \frac{\mu(C_i^{(n)})}{\varepsilon_n} \left( \ln \frac{\mu(C_i^{(n)})}{\varepsilon_n} + \ln \varepsilon_n \right) \right] \leq \varepsilon_n \cdot \text{const} \cdot n.$$

Мы использовали неравенство  $H(\eta) \leq \ln r$ , где  $r$  — число элементов разбиения  $\eta$ . Мы применили его к разбиению множества  $\bigcup'' C_i^{(n)}$ , снабженного условной мерой. Итак,

$H(\xi \vee S^{-1}\xi \vee \dots \vee S^{-n}\xi) \leq \text{const} \cdot \ln n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} H(\xi \vee S^{-1}\xi \vee \dots \vee S^{-n}\xi) = 0$ , что и требовалось доказать.

Существенное отличие между бильярдами внутри многоугольников и групповыми автоморфизмами двумерного тора состоит в поведении близких траекторий. В первом случае траектории, выходящие из двух близких точек, расходятся только линейно по времени, как во втором случае аналогичные траектории расходятся экспоненциально. Сейчас мы докажем теорему, которая обобщает утверждение теоремы 6 и в действительности применима (с некоторыми модификациями) ко многим гладким динамическим системам с положительной энтропией. Сначала введем некоторые определения и сформулируем наши предположения.

Пусть фазовое пространство  $M$  является  $C^\infty$ -гладким  $n$ -мерным римановым многообразием и  $T$  есть  $C^\infty$ -гладкий диффеоморфизм многообразия  $M$ , сохраняющий гладкую меру  $\mu$ .

**Определение 4.** Локальным неустойчивым многообразием (л. н. м.) точки  $x \in M$  называется открытое  $C^2$ -многообразие  $\gamma^{(u)}(x)$ , гомеоморфное единичному шару и такое, что для любого  $y \in \gamma^{(u)}(x)$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(T^n y, T^n x) = 0. \quad (5)$$

Множество  $\Gamma^{(u)}(x)$ , состоящее из точек  $y$ , для которых выполнено (5), называется глобальным неустойчивым многообразием (г. н. м.). Как правило, его можно представить в виде

$$\Gamma^{(u)}(x) = \bigcup_{n > 0} T^n \gamma^{(u)}(T^{-n} x).$$

Если  $n \rightarrow \infty$  в (5), то мы получаем определения локального устойчивого многообразия (л. у. м.) и глобального устойчивого многообразия (г. у. м.).

Эти понятия будут существенно использоваться в части V. Сейчас мы рассмотрим случай, когда почти все  $x \in M$  (по инвариантной мере  $\mu$ ) имеют л. н. м.  $\gamma^{(u)}(x)$ . Предположим, что мы построили измеримое разбиение  $\xi$ , для которого  $C_\xi(x)$  для почти каждого  $x$  является открытым подмногообразием,  $C_\xi(x) \subset \gamma^{(u)}(x)$ . Введем обозначение  $B_r(C_\xi) = \{x | \text{dist}_{\gamma^{(u)}(x)}(x, \partial C_\xi(x)) \leq r\}$ . Здесь  $\text{dist}_{\gamma^{(u)}(x)}$  есть расстояние, вычисленное с помощью римановой метрики, индуцированной на  $\gamma^{(u)}(x)$  римановой метрикой на  $M$ .

**Теорема 8.** Если для некоторых положительных констант  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\rho < 1$

- $\text{diam}_{\gamma^{(u)}(x)}(C_\xi(x)) \leq C$ ;
- $\mu(B_r(C_\xi) | C_\xi) \leq C r^\alpha$  для всех  $r > 0$ ;
- $\text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^n x)}(T^n x, T^n y) \leq C \rho^{-n} \cdot \text{dist}_{\gamma^{(u)}(x)}(x, y)$  для всех  $y \in C_\xi(x)$ ,  $n < 0$  и для почти всех  $x$ , то существует измеримое разбиение  $\zeta$  со следующими свойствами:



- 1)  $T^{-1}\zeta > \zeta$ ;
- 2)  $\bigvee_n T^n \zeta = \varepsilon$ ;
- 3)  $H(T^{-1}\zeta | \zeta) > 0$ ;
- 4)  $\bigwedge_n T^n \zeta = \{\Gamma^{(u)}\} = \gamma$ ,

где  $\{\Gamma^{(u)}\} = \gamma$  есть измеримая оболочка разбиения многообразия  $M$  на  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Иными словами,  $\gamma$  есть такое измеримое разбиение, что  $\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{M}(\{\Gamma^{(u)}\})$ .

Свойства 1) и 3) эквивалентны. В следующей лекции мы обсудим некоторые тонкости, связанные со свойством 3).

**Доказательство.** Пусть  $\zeta = \bigvee_{n \geq 0} T^n \xi = \xi^+$ . Это означает, что  $C_\zeta(x) = \bigcap_{n \geq 0} T^n C_\xi(T^{-n}x)$ . Мы покажем, что для почти всех  $x$  существует  $n_0(x) \geq 0$  такое, что

$$C_\zeta(x) = \bigcap_{0 \leq n \leq n_0(x)} T^n C_\xi(T^{-n}x). \quad (6)$$

Введем множество  $D'_n = \{x | T^{-n}C_\xi(x) \not\subset C_\xi(T^{-n}x)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  Мы утверждаем, что  $D'_n \subset D_n = \{x | \text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(T^{-n}x, \partial C_\xi(T^{-n}x)) \leq C^2 \rho^n\}$ . Действительно, если  $x \in D'_n$ , то  $T^{-n}C_\xi(x)$  пересекается по крайней мере с двумя различными  $C_\xi$ . Но это возможно, только если  $\text{dist}_{C_\xi(T^{-n}x)}(T^{-n}x, \partial C_\xi(T^{-n}x)) \leq C^2 \rho^{-n}$  вследствие а) и с), и из в)  $\mu(D'_n) \leq \mu(D_n) \leq C^{2n+1} \rho^{n\alpha}$ . Ряд  $\sum \mu(D'_n)$  является сходящимся. Из леммы Бореля—Кантелли следует, что для почти всех  $x$  можно найти  $n_0(x) \geq 0$  такое, что  $T^{-n}C_\zeta(x) \subset C_\xi(T^{-n}x)$  для всех  $n > n_0(x)$ , что эквивалентно (6). Это показывает, что  $\zeta \geq \xi$  нетривиально, т. е.  $\zeta \neq \varepsilon$ . Свойство 1) следует прямо из приведенной конструкции.

Свойство 2) следует из включений и неравенств

$$C_{T^n \zeta}(x) = T^n C_\zeta(T^{-n}x) \subset T^n C_\xi(T^{-n}x),$$

$$\text{diam}_{\gamma^{(u)}(x)}(T^n C_\xi(T^{-n}x)) \leq C^2 \rho^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow -\infty.$$

Таким образом,  $\bigcap_{n < 0} C_{T^n \zeta}(x) = x$ .

Свойство 4 вытекает из того, что  $\Gamma^{(u)}(x) = \bigcup_n T^n C_\zeta(T^{-n}x)$ .

Заметим, что в силу неравенства  $T^{-1}\zeta > \zeta$  множества  $T^n C_\zeta(T^{-n}x)$  возрастают, т. е.  $T^{n+1}C_\zeta(T^{-n-1}x) \supset T^n C_\zeta(T^{-n}x)$ . Теорема 8 доказана.

Теорема 8 не дает сразу неравенства  $h(T) > 0$ . Доказательство этого нуждается в следующих дополнительных аргумен-

тах. Теория измеримых разбиений утверждает существование конечных разбиений  $\eta \leq \zeta$ , для которых  $H(\eta|\zeta) > 0$ . Тогда  $\eta^+ = T\eta \vee T^2\eta \vee \dots \vee T^n\eta \vee \dots \leq \zeta$ . Следовательно,  $h(T^{-1}, \eta) = H(\eta|\eta^+) \geq H(\eta|\zeta) > 0$ . Но по теореме 1  $h(T, \eta) = h(T^{-1}, \eta)$ , что и требовалось доказать.

Теорема 8 легко переносится на случай потоков.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Определение энтропии появилось впервые в несколько ином виде в работе:

[1] Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных автоморфизмов и потоков пространств Лебега // ДАН СССР.—1958.—Т. 119, № 5.—С. 861—864.

Наиболее употребительные названия—метрическая энтропия, энтропия Колмогорова, К-энтропия и т. п.

Приведенное в этой лекции определение энтропии близко к определению, данному в работе

[2] Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР.—1959.—Т. 124, № 4.—С. 768—771.

В этой же работе появилась теорема 3. Заметим, что частный случай этой теоремы приводил А. Н. Колмогоров в своих лекциях (не опубликовано). В упомянутой работе А. Н. Колмогорова приведена также теорема 2. Доказательство теоремы 1' принадлежит М. С. Пинскеру (им не опубликовано, частное сообщение).

2° Энтропийная теория динамических систем излагается во многих монографиях, например:

[3] Биллингсли П. Эргодическая теория и информация.—М.: Мир, 1969.—238 с.

[4] Walters P. Ergodic Theory. Introductory Lectures. Lecture Notes in Mathematics, v. 458.—Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[5] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука, 1980.—384 с.

3° Теория Орнштейна изложена в его книге

[6] Ornstein D. Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems.—New Haven and London: Yale University Press, 1970. (Рус. пер.: Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы. Серия: Математика. Новое в зарубежной науке.—М.: Мир, 1978.)

## ЛЕКЦИЯ 7

### ТЕОРЕМА БРЕЙМАНА, РАЗБИЕНИЕ ПИНСКЕРА, К-СИСТЕМЫ, ТОЧНЫЕ ЭНДОМОРФИЗМЫ

Мы докажем сейчас важную теорему Бреймана, обобщающую более раннюю теорему Шеннона—Мак-Миллана. Предположим, что  $T$ —эргодический автоморфизм пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  и  $\xi$ —конечное разбиение. Для любого  $x \in M$  обозначим через  $C_n(x)$  элемент разбиения  $\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi$ , содержащий точку  $x$ .

Теорема 1 (Брейман; см. [1]). Для п. в. х

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu(C_n(x)) = -h(T, \xi).$$

Это утверждение показывает, что для большинства  $C_n$  их меры  $\mu(C_n)$  в некотором слабом смысле одинаковы и энтропия характеризует рост числа типичных элементов разбиения  $\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mu(C_n(x)) &= \mu(C_\xi(x) | C_{T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi}(x)) \times \\ &\times \mu(C_\xi(Tx) | C_{T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi}(Tx)) \dots \mu(C_\xi(T^n x)) \end{aligned}$$

и

$$\ln \mu(C_n(x)) = \sum_{k=0}^n g_{n-k}(T^k x), \quad (1)$$

где  $g_m(x) = \ln \mu(C_\xi(x) | C_{T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-m}\xi}(x))$ . Согласно теореме Дуба

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) &= g(x) = \ln \mu(C_\xi(x) | C_{T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-\infty}\xi \vee \dots}(x)) = \\ &= \ln \mu(C_\xi(x) | C_\xi(x)) \end{aligned}$$

почти всюду. Мы уже отметили, что  $g(x) \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,

$$h(T, \xi) = - \int g(x) d\mu(x).$$

Из (1) следует

$$\frac{1}{n} \ln \mu(C_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(T^k x) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (g_{n-k}(T^k x) - g(T^k x)).$$

Теорема Биркгофа—Хинчина утверждает, что первое слагаемое стремится к  $-h(T, \xi)$ . Поэтому мы должны доказать, что второе слагаемое стремится к нулю почти всюду.

Положим  $G_n(x) = \sup_{m \geq n} |g(x) - g_m(x)|$ . Тогда можно написать

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (g_{n-k}(T^k x) - g(T^k x)) \right| &\leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |g_{n-k}(T^k x) - g(T^k x)| \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n G_N(T^k x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int G_N(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Однако  $G_N(x) \rightarrow 0$  п. в. Кроме того,

$$G_N(x) \leq |g(x)| + \sup_m |g_m(x)|.$$

Если мы покажем, что  $\sup |g_m(x)| \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ , то это даст требуемый результат, поскольку будет означать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int G_N(x) d\mu(x) = 0.$$

Лемма 1.  $\mu\{x | \sup_m |g_m(x)| > \lambda\} \leq re^{-\lambda}$ , где  $r$  равно числу элементов разбиения  $\xi$ .

Доказательство. Введем множества  $E_k = \{x | \max_{0 \leq j < k} |g_j(x)| \leq \lambda, |g_k(x)| > \lambda\}$ . Они попарно не пересекаются и

$$\begin{aligned} \mu\{E_k \cap C_1\} &= \\ &= \sum_{C_1 \cap T^{-1}C_{i-1} \cap \dots \cap T^{-k}C_{i-k} \subset E_k \cap C_1} \mu\{C_1 | T^{-1}C_{i-1} \cap \dots \cap T^{-k}C_{i-k}\} \times \\ &\quad \times \mu\{T^{-1}C_{i-1} \cap \dots \cap T^{-k}C_{i-k}\} \leq e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

а тогда  $\mu\{E_k\} = \sum_i \mu\{E_k \cap C_i\} \leq re^{-\lambda}$ . Лемма доказана.

Из леммы немедленно следует, что функция  $\sup |g_m(x)|$  интегрируема. Это полностью доказывает теорему Бреймана.

Введем новое разбиение  $\pi(T) = \bigvee_{\xi | h(T, \xi) = 0} \xi$ . Это обозначение принято в честь М. С. Пинскера, в статье которого [2] указанное разбиение появилось впервые. Разбиение  $\pi(T)$  есть максимальное разбиение с нулевой энтропией. Ясно, что  $T\pi(T) = \pi(T)$ . В случае потоков  $\pi(S^t)$  не зависит от  $t$ . Оно обозначается  $\pi(\{S^t\})$ . Для него  $S^t\pi(\{S^t\}) = \pi(\{S^t\})$  при всех  $t$ ,  $-\infty < t < \infty$ .

В нашей совместной работе с В. А. Рохлиным [3] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для каждого автоморфизма  $T$  существует измеримое разбиение  $\xi$ , обладающее следующими свойствами:

- 1)  $T\xi \geq \xi$ ; 2)  $\bigvee_n T^n \xi = \varepsilon$ ;
- 3)  $\bigwedge_n T^n \xi = \pi(T)$ ; 4)  $H(T\xi | \xi) = h(T)$ .

Если разбиение  $\xi'$  удовлетворяет 1), 2), то  $\bigwedge_n T^n \xi' \geq \pi(T)$ . Если  $h(T) < \infty$  и разбиение  $\xi''$  удовлетворяет 1), 2), 4), то  $\bigwedge_n T^n \xi'' = \pi(T)$ .

Аналогичная теорема для потоков была доказана Гуревичем [4] и Бланшаром [5] на основании одного результата Рудольфа [6].

Сейчас мы введем важное понятие.

**Определение 1.** Автоморфизм  $T$  называется  $K$ -автоморфизмом, если существует разбиение  $\xi$  такое, что

$$1) T\xi > \xi; \quad 2) \bigvee_n T^n \xi = \varepsilon; \quad 3) \bigwedge_n T^n \xi = v.$$

**Определение 1'.** Поток  $\{S^t\}$  называется  $K$ -поток, если существует разбиение  $\xi$  такое, что

$$1) S^t \xi > \xi \text{ при всех } t > 0;$$

$$2) \bigvee_t S^t \xi = \varepsilon;$$

$$3) \bigvee_t S^t \xi = v.$$

Напомним, что  $\varepsilon$  есть самое мелкое разбиение на отдельные точки, а  $v$  есть самое крупное разбиение, единственным элементом которого является  $M$ .

Буква «К» используется в честь А. Н. Колмогорова, который ввел эти определения в первой статье по энтропии динамической системы (см. ссылки к предыдущей лекции).

Из теоремы 2 немедленно следует, что  $T$  есть  $K$ -автоморфизм тогда и только тогда, когда  $\pi(T) = v$ . То же утверждение также верно и для потоков.

**Теорема 3.** 1) Каждый  $K$ -автоморфизм имеет счетно-кратный лебеговский спектр; 2)  $T$  является  $K$ -автоморфизмом тогда и только тогда, когда  $T^m$  есть  $K$ -автоморфизм при некотором  $m$ ; 3)  $T$  обладает перемешиванием.

**Доказательство.** Второе утверждение может быть легко выведено из теоремы 2, а третье утверждение следует из первого.

Чтобы доказать первое утверждение, обозначим через  $H^k$  подпространство пространства  $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ , порожденное функциями, измеримыми относительно  $(\mathcal{M}(T^k \xi))$ ,  $-\infty < k < \infty$ . Тогда

$$L^2(M, \mathcal{M}, \mu) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U_T^m (H^1 \ominus H^0).$$

Уже было показано, что  $\dim(H^1 \ominus H^0) = \infty$  (см. теорему 2 предыдущей лекции). Это и дает нужный результат. Теорема 3 доказана.

Аналогичное утверждение справедливо для потоков, но доказательство его более сложно. Справедлива

**Теорема 4.** *Поток  $\{S^t\}$  является  $K$ -потоком тогда и только тогда, когда по крайней мере один автоморфизм  $S^t$  есть  $K$ -автоморфизм.*

Важность понятия  $K$ -системы состоит в том, что в целом ряде случаев проще доказывать сразу  $K$ -свойство системы и из этого выводить эргодичность и исследовать свойства перемешивания.

Рассмотрим теперь эндоморфизм  $T$  пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Введем убывающую последовательность разбиений  $\varepsilon \geq T^{-1}\varepsilon \geq T^{-2}\varepsilon \geq \dots \geq T^{-n}\varepsilon \geq \dots$

**Определение 2.** *Эндоморфизм  $T$  называется точным эндоморфизмом, если  $\bigwedge_n T^{-n}\varepsilon = v$ .*

Точные автоморфизмы были введены В. А. Рохлиным (см. [7]). Они являются аналогами  $K$ -автоморфизмов. В частности, точные автоморфизмы эргодичны, имеют счетно-кратный лебеговский спектр и положительную энтропию.

В качестве примера возьмем  $M = S^1$  и рассмотрим отображение  $T$ , заданное строго монотонной  $C^2$ -функцией  $f(x)$ ,  $f(x+1) = f(x) + d$ , где  $d > 1$  — целое число,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) > 0$  и  $Tx = \{f(x)\}$ , где  $\{\cdot\}$  — дробная часть. Ясно, что  $T$  непрерывно. Допустим, что  $T$  имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру  $\mu$  с плотностью  $\rho(x) \geq 0$  (см. лекцию 12).

Введем разбиения  $\xi_r$ , каждый элемент которых есть такой отрезок  $\Delta_i^{(r)}$ , что  $T^r$  отображает  $\Delta_i^{(r)}$  взаимно-однозначно на всю окружность  $S^1$  (включая концы). Число элементов разбиения  $\xi_r$  равно  $d^r$ . Такие отрезки легко строятся индуктивно.

**Теорема 5.** *Если  $\sum_r \max_i l(\Delta_i^{(r)}) < \infty$ , где  $l$  — обычная длина, то  $T$  — точный эндоморфизм.*

**Доказательство.** Каждый элемент разбиения  $T^{-n}\varepsilon$  состоит из  $d^n$  точек и имеет вид  $T^{-n}x$  для некоторого  $x \in S^1$ . Равенство  $T^{-n}\varepsilon \vee \xi_r = \varepsilon$  означает, что для любого  $x$  пересечение  $\Delta_i^{(r)} \cap T^{-n}x$  состоит в точности из одной точки.

Предположим, что существует  $A \subset \mathcal{M}(\bigwedge_n T^{-n}\varepsilon)$ , для которого  $0 < \mu(A) < 1$ . Покажем, что для любого  $\delta > 0$  можно найти

$n_0$  и множества  $A'_{n_0}$ ,  $A''_{n_0}$ ,  $B \in \mathcal{M}(\xi_{n_0})$  такие, что

$$|\mu(A'_{n_0}) - \mu(A)| < \delta,$$

$$|\mu(A''_{n_0}) - (1 - \mu(A))| < \delta, \quad \mu(B) \geq 1 - \delta,$$

и если  $C_{\xi_{n_0}} \subset A'_{n_0}$ , то

$$\left| \frac{\mu(A \cap C_{\xi_{n_0}})}{\mu(C_{\xi_{n_0}})} - 1 \right| \leq \delta;$$

если  $C_{\xi_{n_0}} \subset A''_{n_0}$ , то

$$\frac{\mu(A \cap C_{\xi_{n_0}})}{\mu(C_{\xi_{n_0}})} < \delta;$$

если  $C_{\xi_{n_0}} \subset B$ , то

$$\frac{\mu(K(C_{\xi_{n_0}}))}{\mu(C_{\xi_{n_0}})} \geq 1 - \delta \quad \text{и} \quad \frac{l(K(C_{\xi_{n_0}}))}{l(C_{\xi_{n_0}})} \geq 1 - \delta;$$

где  $K(C_{\xi_{n_0}}) \subset C_{\xi_{n_0}}$  — множество точек  $x$ , принадлежащих отрезку  $C_{\xi_{n_0}}$ , для которых выполнено неравенство

$$\left| \frac{\rho(x)l(C_{\xi_{n_0}})}{\int_{C_{\xi_{n_0}}} \rho(y) dy} - 1 \right| \leq \delta.$$

Мы проведем построение лишь множества  $A'_{n_0}$ , поскольку множества  $A''_{n_0}$  и  $B$  строятся аналогичным способом.

Фиксируем произвольное число  $\delta > 0$ . В теории меры хорошо известен факт, что для  $\mu$ -почти всех точек окружности

$S^1$  существует предел  $\lim_{l(C) \rightarrow 0} \frac{\mu(C \cap A)}{\mu(C)} = \chi_A(x)$  ( $\mu$ -п. в.), где

$\chi_A(x)$  — индикатор множества  $A$ . Точки множества  $A$ , для которых этот предел равен 1, называются точками плотности множества  $A$ . Рассмотрим множества

$$A'_n = \left\{ C \in \xi_n : \left| \frac{\mu(C \cap A)}{\mu(C)} - 1 \right| < \delta \right\}.$$

Тогда  $\chi_{A'_n}(x) \xrightarrow[\mu \rightarrow \infty]{\mu \text{ п. в.}} \chi_A(x)$ . Следовательно,  $\mu(A'_n) \rightarrow \mu(A)$ , и, выбирая  $n_0$  достаточно большим, имеем  $|\mu(A'_{n_0}) - \mu(A)| < \delta$ .

Возьмем произвольный отрезок  $C_{\xi_{n_0}} = \Delta_i$ . Тогда  $T^{n_0}$  взаимнооднозначно отображает  $\Delta_i^{n_0}$  на  $S^1$ . Если  $\tau$  есть естественная координата на  $S^1$ , то мы можем ввести такую координату  $\tau$  на  $\Delta_i^{n_0}$ , что  $T^{n_0}x(\tau) = \tau$ ,  $0 \leq \tau < 1$ .

Лемма 2. Существуют абсолютные константы  $b_1, b_2$ , не зависящие от  $n_0$ , для которых

$$b_1 \leq \frac{1}{l(\Delta_i^{(n_0)})} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \leq b_2.$$

Доказательство этой леммы будет дано позже. Сейчас мы закончим доказательство теоремы. Для  $\Delta_i^{(n_0)} \in A'_{n_0} \cap B$

$$\begin{aligned} 1 - \delta &\leq \frac{1}{\mu(\Delta_i^{(n_0)})} \int_{A \cap \Delta_i^{(n_0)}} \rho(x) dx = \frac{1}{\mu(\Delta_i^{(n_0)})} \cdot \int_{A \cap K(\Delta_i^{(n_0)})} \rho(x) dx + \delta = \\ &= \int_{A \cap K(\Delta_i^{(n_0)})} \frac{\rho(x) l(\Delta_i^{(n_0)})}{\mu(\Delta_i^{(n_0)})} \cdot \frac{dx}{l(\Delta_i^{(n_0)})} + \delta \leq (1 + \delta) \int_{\tilde{A}} \frac{dx}{l(\Delta_i^{(n_0)})} + \delta = \\ &= (1 + \delta) \int_{\tilde{A}} \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{l(\Delta_i^{(n_0)})} d\tau + \delta \leq (1 + \delta) b_2 \int_{\tilde{A}} d\tau + \delta. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{A} = T^{n_0}(A \cap \Delta_i^{(n_0)})$ . Поскольку  $A \in \mathcal{M}(T^{-n_0}\epsilon)$ , множество  $\tilde{A}$  не зависит от  $\Delta_i^{(n_0)}$ , но зависит только от  $A$ .

Теперь для  $\Delta_{i_1}^{(n_0)} \in A''_{n_0} \cap B$  мы можем написать

$$\begin{aligned} \delta &\geq \frac{1}{\mu(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} \int_{A \cap \Delta_{i_1}^{(n_0)}} \rho(x) dx \geq \int_{A \cap K(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} \frac{\rho(x) l(\Delta_{i_1}^{(n_0)})}{\mu(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} \frac{dx}{l(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} \geq \\ &\geq (1 - \delta) \int_{A \cap K(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} \frac{dx}{l(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} \geq (1 - \delta) \int_{\tilde{A}} \frac{dx}{l(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} - \delta = \\ &= (1 - \delta) \int_{\tilde{A}} \frac{dx}{d\tau} \frac{1}{l(\Delta_{i_1}^{(n_0)})} d\tau - \delta \geq (1 - \delta) b_1 \int_{\tilde{A}} d\tau - \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1 - 2\delta}{(1 + \delta)b_2} \leq \int_{\tilde{A}} d\tau \leq \frac{2\delta}{(1 - \delta)b_1}.$$

Для достаточно малого  $\delta$  эти неравенства противоречат друг другу, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Доказательство леммы 2. Возьмем две точки  $x', x'' \in \Delta_i^{(n_0)}$ . Мы покажем, что

$$c_1 \leq \left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=x'} : \left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=x''} \leq c_2$$



для некоторых констант  $c_1, c_2$ . Имеем

$$\left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=x'} = \prod_{i=0}^{n_0-1} f'(T^i x'), \quad \left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=x''} = \prod_{i=0}^{n_0-1} f'(T^i x''),$$

откуда

$$\frac{\prod_{i=0}^{n_0-1} f'(T^i x')}{\prod_{i=0}^{n_0-1} f'(T^i x'')} = \prod_{i=0}^{n_0-1} \left( 1 + \frac{f'(T^i x') - f'(T^i x'')}{f'(T^i x'')} \right).$$

Далее,  $f'(T^i x'') \geq \text{const}$ ,  $|f'(T^i x') - f'(T^i x'')| \leq \max_x |f''(x)| \cdot |T^i x' - T^i x''|$ . Точки  $T^i x'$ ,  $T^i x''$  принадлежат одному и тому же элементу  $\xi_{n_0-i}$ . Следовательно,  $|T^i x' - T^i x''| \leq \max_k l(\Delta_k^{(n_0-i)})$ .

Вместе с условием теоремы это дает требуемый результат. Лемма 2 доказана.

## ССЫЛКИ

[1] Breiman L. The individual ergodic theorem of information theory//Ann. Math. Stat.—1957.—V. 28.—P. 809—811.

[2] Пинскер М. С. Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией//ДАН СССР.—1960. Т. 33, № 5.—С. 1025—1026.

[3] Рохлин В. А., Синяй Я. Г. Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений//ДАН СССР.—1961.—Т. 141, № 5.—С. 1038—1041.

[4] Гуревич Б. М. Совершенные разбиения для эргодических потоков//Функцион. анализ и его прил.—1977.—Т. 11, № 3.—С. 20—23.

[5] Blanchard F. Partition extremales de flots d'entropie finie//Z. Wahrscheinlichkeitstheorie.—1976.—Bd. 36, № 2.—S. 129—136.

[6] Rudolph D. A Two-valued Step—coding for Ergodic Flows//Proc. of the International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics, Rennes.—1975. P. 14—21.

[7] Рохлин В. А. Точные эндоморфизмы пространств Лебега//Изв. АН СССР. Сер. мат.—1961.—V. 25.—P. 499—530.

## ЛЕКЦИЯ 8

### ЭНТРОПИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ. СИСТЕМЫ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ КАК ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Произвольный эндоморфизм  $T$  пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  порождает циклическую полугруппу  $\{T^i\}$  эндоморфизмов этого пространства. Энтропия  $h(T)$  может рассматриваться как характеристика всей этой полугруппы. Для любого  $k > 0$  полугруппа  $\{T^{ik}\}$  есть подполугруппа

полугруппы  $\{T^k\}$ . При этом формула  $h(T^k) = kh(T)$  устанавливает связь между энтропиями полугруппы и подполугруппы. В случае автоморфизмов мы имеем циклическую группу и предыдущее соотношение связывает энтропии группы и подгруппы. Сейчас мы обобщим эти соотношения на более широкий класс групп. Для простоты обсудим случай группы  $\mathbf{Z}^d$ . Мы предполагаем, что дано  $d$  коммутирующих автоморфизмов  $T_1, T_2, \dots, T_d$  и вся группа состоит из автоморфизмов вида  $T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_d^{n_d} = T^{(n)}$ , где  $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{Z}^d$ .

Возьмем произвольное разбиение  $\xi \in Z$  и параллелепипед  $\Pi = \{(n) | 0 \leq n_1 < R_1, 0 \leq n_2 < R_2, \dots, 0 \leq n_d < R_d\}$ . Построим разбиение  $\xi(\Pi) = \bigvee_{(n) \in \Pi} T^{(n)} \xi$  и рассмотрим энтропию  $H(\xi(\Pi))$ .

Лемма 1. *Существует предел*

$$h(T_1, \dots, T_d; \xi) = \lim_{\substack{R_i \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq d}} \frac{1}{\prod_{i=1}^d R_i} H(\xi(\Pi)).$$

Доказательство. Как и при  $d=1$ , найдем вначале значение правой части, а затем покажем, что оно действительно равно написанному пределу. Положим

$$(\xi^-)^d = \bigvee_{i=1}^d \bigvee_{-\infty < k_i < \infty} T_1^{k_1} T_2^{k_2} \dots T_{i-1}^{k_{i-1}} \xi \vee T_i^{k_i} \xi.$$

Покажем, что

$$\lim_{\substack{R_i \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq d}} \frac{1}{\prod_{i=1}^d R_i} H(\xi(\Pi)) = H(\xi | (\xi^-)^d).$$

Проведем рассуждения при  $d=2$ . Из свойств энтропии

$$\begin{aligned} H(\xi(\Pi)) &= H\left(\bigvee_{0 \leq n_1 < R_1} \bigvee_{0 \leq n_2 < R_2} T_1^{n_1} T_2^{n_2} \xi\right) = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq n_1 < R_1 \\ 0 \leq n_2 < R_2}} H\left(T_1^{n_1} T_2^{n_2} \xi \mid \bigvee_{0 \leq m_1 < n_1} T_1^{m_1} T_2^{n_2} \xi \vee \bigvee_{\substack{0 \leq m_1 < R_1 \\ 0 \leq m_2 < n_2}} T_1^{m_1} T_2^{m_2} \xi\right) = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq n_1 < R_1 \\ 0 \leq n_2 < R_2}} H\left(\xi \mid \bigvee_{-n_1 < m_1 < 0} T_1^{m_1} \xi \vee \bigvee_{\substack{-n_1 \leq m_1 < R_1 - n_1 \\ -n_2 < m_2 < 0}} T_1^{m_1} T_2^{m_2} \xi\right). \end{aligned}$$

Для большинства индексов  $n_1, n_2$  соответствующие энтропии сходятся к  $H(\xi | (\xi^-)^d)$ , а вкладом остальных можно пренебречь. Более подробные рассуждения мы опускаем.

Определение 1.  $h(T_1, \dots, T_d) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in Z} h(T_1, \dots, T_d; \xi)$ .

Число  $h(T_1, \dots, T_d)$  естественно рассматривать как характеристику всей группы  $\{T^{(n)}, n \in \mathbb{Z}^d\}$ . Для произвольной подгруппы  $\tilde{\mathbb{Z}}^d \subset \mathbb{Z}^d$  конечного индекса  $N = \mathbb{Z}^d : \tilde{\mathbb{Z}}^d$  возьмем ее образующие  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_d$ .

Лемма 2.  $h(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_d) = Nh(T_1, T_2, \dots, T_d)$  и не зависит от выбора системы образующих.

Утверждение леммы есть аналог свойства обычной энтропии  $h(T^k) = |k|h(T)$  и доказывается тем же способом.

Лемма 3. Если  $h(T_1, \dots, T_d) > 0$ , то  $h(T^{(n)}) = \infty$  для любого автоморфизма  $T^{(n)} = T_1^{n_1} \dots T_d^{n_d}$ .

Доказательство опять проведем при  $d=2$ . Предположим также, что  $T = T^{(n)} = T_1 T_2$ . Общий случай легко к этому сводится. Возьмем разбиение  $\xi$ , для которого  $h(T_1, T_2; \xi) > 0$ . Положим  $\xi_{-m}^m = \bigvee_{|i| \leq m} T_1^i \xi$ . Тогда

$$h(T; \xi_{-m}^m) = H(\xi_{-m}^m | (\xi_{-m}^m)^-),$$

где  $(\xi_{-m}^m)^- = \bigvee_{k>0} T^{-k} \xi_{-m}^m = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigvee_{|l| \leq m} T_1^{-i+l} T_2^{-i} \xi$ . Далее,

$$\begin{aligned} H(\xi_{-m}^m | (\xi_{-m}^m)^-) &= \sum_{l=-m}^m H(T_1^l \xi | \bigvee_{k=-m}^{l-1} T_1^k \xi \vee (\xi_{-m}^m)^-) = \\ &= \sum_{l=-m}^m H(\xi | \bigvee_{k=-m-l}^{-1} T_1^k \xi \vee T_2^{-l} (\xi_{-m}^m)^-). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при любых  $m$

$$\bigvee_{k=-m-l}^{-1} T_1^k \xi \vee T_2^{-l} (\xi_{-m}^m)^- \leq (\xi^-)^2.$$

Следовательно, последняя сумма не меньше, чем  $(2m+1)H \times (\xi | (\xi^-)^2) > 0$ . Это означает, что  $h(T) \geq (2m+1)H(\xi | (\xi^-)^2)$  при любом  $m$ , т. е.  $h(T) = \infty$ . Лемма 3 доказана.

Легко построить примеры действия группы  $\mathbb{Z}^d$  с  $h(T_1, T_2, \dots, T_d) > 0$ , можно естественно определить бернуллиевское действие группы  $\mathbb{Z}^d$  и т. п. Мы рассмотрим сейчас весьма популярный и интересный пример другого действия группы  $\mathbb{Z}^d$ , когда  $h(T_1^{n_1} T_2^{n_2}) < \infty$  при всех  $n_1, n_2$ , и поэтому  $h(T_1, T_2) = 0$ . Предположим, что имеется последовательность автоматов, где каждый автомат может находиться в одном из конечного числа состояний. Обозначим пространство возможных состояний автомата через  $A = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}\}$ . Состояние последовательности автоматов описывается бесконечной последовательностью  $x = \{x_m\}$ ,  $x_m \in A$ ,  $-\infty < m < \infty$ . Пространство всех возможных последовательностей  $x$  обозначим  $M$ , сдвиг влево, действующий в  $M$ , обозначим  $T_1$ .

Динамика всей последовательности автоматов задается функцией  $\varphi(x_{-r}, \dots, x_r)$ , принимающей значения в  $A$ . Если в данный момент времени последовательность состояний автоматов описывается  $x \in M$ , то в следующий момент времени она описывается  $y \in M$ , где  $y = \{y_m\}$  и  $y_m = \varphi(x_{m-r}, \dots, x_{m+r})$ . Преобразование  $x \mapsto y$  обозначим  $T_2$ . Ясно, что  $T_2$  есть эндоморфизм пространства  $M$ , поскольку одна последовательность  $y$  может возникнуть, вообще говоря, из разных последовательностей  $x$ . Траектория точки  $x^{(0)} = \{x_m^{(0)}\}$ , т. е.  $T_2^s x^{(0)} = x^{(s)} = \{x_m^{(s)}\}$  может быть представлена как конфигурация со значениями в  $A$ , определенная на полурешетке  $s \geq 0$ ,  $-\infty < m < \infty$ , причем  $x_m^{(s+1)} = \varphi(x_{m-r}^{(s)}, \dots, x_{m+r}^{(s)})$ . Ясно, что  $T_1$  и  $T_2$  коммутируют. Допустим, что на пространстве  $(M, \mathcal{M})$  задана мера  $\mu$ , инвариантная как относительно  $T_1$ , так и относительно  $T_2$ . Тогда она будет инвариантна и относительно полугруппы эндоморфизмов  $T_1^n T_2^m$ .

Лемма 4.  $h(T_1^n T_2^m) < \infty$  для любых  $n_1, n_2$ .

Доказательство. Утверждение очевидно для  $n_2 = 0$ . Мы покажем, что  $h(T_2) < \infty$ . Общий случай оставляется в качестве упражнения.

Возьмем конечное разбиение  $\xi_k$ , элементы которого получают при фиксации координат  $x_m$ ,  $|m| \leq k$ . Число элементов  $\xi_k$  не превосходит  $p^{2k+1}$ . Достаточно показать, что  $h(T_2, \xi_k) \leq \text{const}$ , где  $\text{const}$  не зависит от  $k$ .

Заметим вначале, что  $\xi_k \vee T_2^{-1} \xi_k \vee \dots \vee T_2^{-n} \xi_k \leq \xi_{k+(2r+1)n}$ . В самом деле, возьмем  $x$ ,  $T_2 x$ , ...,  $T_2^n x$ . Фиксация элемента  $S$  разбиения  $\xi_k \vee T_2^{-1} \xi_k \vee \dots \vee T_2^{-n} \xi_k$  означает фиксацию координат  $x_t^m$ ,  $|t| \leq k$ ,  $0 \leq m \leq n$ . Как следует из определения динамики, задание всех координат  $x_s^{(0)}$ ,  $|s| \leq k + (2r+1)n$  однозначно определяет значение всех координат  $x_t^{(m)}$ ,  $|t| \leq k$ ,  $0 \leq m \leq n$ . Поэтому

$$H(\xi_k \vee T_2^{-1} \xi_k \vee \dots \vee T_2^{-n} \xi_k) \leq H(\xi_{k+(2r+1)n}) \leq (k + (2r+1)n) \ln p.$$

Разделив обе части неравенства на  $n$  и устремив  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$h(T_2, \xi_k) \leq (2r+1) \ln p,$$

что и требовалось доказать.

Итак,  $h(T_1^n T_2^m) < \infty$ . Из свойств энтропии мы знаем, что  $h(T_1^m T_2^n) = |m| h(T_1 T_2^n)$ . Дж. Милнор поставил следующий вопрос: пусть даны последовательности  $\{n_1^{(i)}\}$ ,  $\{n_2^{(i)}\}$ , причем  $n_1^{(i)} \rightarrow \infty$  или  $-\infty$ ,  $n_2^{(i)} \rightarrow \infty$  и  $n_1^{(i)} / n_2^{(i)} \rightarrow c$  при  $i \rightarrow \infty$ , где  $c$  — постоянная. Спрашивается, существует ли предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h(T_1^{n_1^{(i)}} T_2^{n_2^{(i)}})}{\sqrt{(n_1^{(i)})^2 + (n_2^{(i)})^2}}.$$

Если этот предел существует и не зависит от выбора последовательностей  $\{n^{(i)}\}$ ,  $\{n_2^{(i)}\}$ , то его естественно назвать энтропией по направлению, определяемому значением  $s$ . Ниже мы дадим частичный ответ на этот вопрос. Обсуждается только случай  $s > 0$ .

Вначале несколько расширим наше пространство. Введем пространство  $\tilde{M}$  последовательностей, заданных на решетке  $\mathbf{Z}^2$ , т. е.  $\{x_n^{(s)}\}$ ,  $x_n^{(s)} \in A$ ,  $-\infty < n < \infty$ ,  $-\infty < s < \infty$ . При этом рассматриваемые последовательности таковы, что  $x_n^{(s)} = \varphi(x_{n-r}^{(s-1)}, \dots, x_{n+r}^{(s-1)})$ . Через  $T_1$  обозначим по-прежнему сдвиг влево вдоль горизонтальной оси, а через  $T_2$  обозначим сдвиг на единицу вниз, т. е.  $T_2 x_n^{(s)} = x_n^{(s+1)}$ . Достоинство пространства  $\tilde{M}$  в том, что теперь  $T_2$  становится автоморфизмом пространства  $\tilde{M}$ . Введем в  $\tilde{M}$  меру  $\tilde{\mu}$ , положив для любого набора  $x_{n_1}^{(s_1)}, \dots, x_{n_r}^{(s_r)}$

$$\tilde{\mu}\{x_{n_1}^{(s_1)}, \dots, x_{n_r}^{(s_r)}\} = \mu\{x_{n_1}^{(s_1+t)}, \dots, x_{n_r}^{(s_r+t)}\},$$

где  $t$  выбрано так, что  $s_j + t \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq r$ . В силу инвариантности  $\mu$  относительно  $T_2$  правая часть не зависит от  $t$ . Легко также видеть, что энтропия  $h(T_1^n T_2^r)$ , вычисленная с помощью меры  $\mu$ , равна энтропии  $h(T_1^n T_2^r)$ , вычисленной с помощью меры  $\tilde{\mu}$ . В общей эргодической теории переход от эндоморфизма  $T_2$  пространства  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  к соответствующему автоморфизму  $T_2$  пространства  $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$  называется естественным расширением эндоморфизма (см. [2], [3]). Далее условные энтропии, условные математические ожидания и т. п. по отношению к мере  $\tilde{\mu}$  будут снабжаться знаком  $\sim$  (тильда).

Введем еще ряд обозначений. Пусть  $a \in \mathbf{R}^1$ ,  $\omega \in \mathbf{R}^+$ ,  $I(a, \omega)$  есть сегмент, соединяющий точки плоскости  $(a, -1)$  и  $(a + \omega^{-1}, 0)$ ,  $\Gamma(a, \omega)$  — полупрямая  $y + 1 = \omega(x - a)$ ,  $y \leq 0$ . Ясно, что  $I(a, \omega) \subset \Gamma(a, \omega)$ . Через  $\xi_m^{(s)}$  обозначим разбиение пространства  $\tilde{M}$ , получающееся в результате фиксации  $x_m^{(s)}$ . Введем следующие условные энтропии:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_l(I(a, \omega)) &= \tilde{H}\left(\bigvee_{m \geq a + \omega} \xi_m^{(0)} \mid \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m \geq a - \frac{n}{\omega}} \xi_m^{(-n)}\right), \\ \tilde{H}_r(I(a, \omega)) &= \tilde{H}\left(\bigvee_{m \leq a + \omega} \xi_m^{(0)} \mid \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m \leq a - \frac{n}{\omega}} \xi_m^{(-n)}\right),\end{aligned}$$

$$\tilde{H}(I(a, \omega)) = \tilde{H}_r(I(a, \omega)) + \tilde{H}_l(I(a, \omega)).$$

Все эти энтропии конечны, поскольку значения переменных  $x_m^{(0)}$  при  $m \geq a + \omega^{-1} + r$  в случае  $\tilde{H}_l$  и  $x_m^{(0)}$  при  $m \leq a + \omega^{-1} - r$  в случае  $\tilde{H}_r$  однозначно определяются элементом разбиения,

стоящим в условии. Определим отображение  $Q$  в пространстве сегментов  $I(a, \omega)$ , положив  $Q(I(a, \omega)) = I(a + \omega^{-1}, \omega)$ .

Лемма 5. Пусть  $p > 0$ ,  $q > 0$  взаимно просты. Тогда

$$h(T_1^p T_2^q) = \sum_{i=0}^{q-1} \tilde{H}(Q^i(I)) = q \int_0^1 \tilde{H}(I(b, \omega)) db$$

для любого  $I = I(a, q/p)$ .

Доказательство. Значение  $h(T_1^p T_2^q)$  равно пределу

$$h(T_1^p T_2^q) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{H} \left( \bigvee_{n=0}^{q-1} \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}n - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n + s}} \xi_m^{(n)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}n - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n + s}} \xi_m^{(n)} \right), \omega = q/p.$$

Используя формулу для условной энтропии, мы можем переписать условную энтропию под знаком предела в виде суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{q-1} \tilde{H} \left( \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}l - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}l + s}} \xi_m^{(l)} \middle| \bigvee_{n < l} \bigvee_{|m - a - \omega^{-1}l| \leq s} \xi_m^{(n)} \right) = \\ = \sum_{l=0}^{q-1} \tilde{H} \left( \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}l - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}l + s}} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{|m - a - \omega^{-1}(l+n)| \leq s} \xi_m^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что каждое слагаемое в последней сумме сходится при  $s \rightarrow \infty$  к  $\tilde{H}(Q^l(I))$ . Достаточно рассмотреть  $l=0$ , для остальных слагаемых рассуждения аналогичны. Из определения нашей системы следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{H} \left( \bigvee_{a-s \leq m \leq a+s} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}n - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n + s}} \xi_m^{(n)} \right) = \\ = \tilde{H} \left( \bigvee_{\substack{a-s \leq m \leq \\ \leq a-s+r}} \xi_m^{(0)} \bigvee_{\substack{a+s-r \leq m \leq \\ \leq a+s}} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}n - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n + s}} \xi_m^{(n)} \right) = \\ = \tilde{H} \left( \bigvee_{\substack{a+s-r \leq m \leq \\ \leq a+s}} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{\substack{a-s + \omega^{-1}n \leq m \leq \\ \leq a+s + \omega^{-1}n}} \xi_m^{(n)} \right) + \\ + \tilde{H} \left( \bigvee_{\substack{a-s \leq m \leq \\ \leq a-s+r}} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}n - s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n + s}} \xi_m^{(n)} \bigvee_{\substack{a+s-r \leq m \leq \\ \leq a+s}} \xi_m^{(0)} \right). \end{aligned}$$

В силу инвариантности меры  $\tilde{\mu}$  относительно  $T_1$  первое слагаемое равно

$$\tilde{H} \left( \bigvee_{-r \leq m \leq 0} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{n < 0} \bigvee_{\substack{a + \omega^{-1}n - 2s \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n}} \xi_m^{(n)} \right).$$

При возрастании  $s$  эти условные энтропии убывают и сходятся к  $\tilde{H}_r(I(a, \omega))$ . Поясним, почему вторые слагаемые сходятся при  $s \rightarrow \infty$  к  $\tilde{H}_l(I(a, \omega))$ . Это утверждение вытекает из ряда фактов общей теории меры. Заметим прежде всего, что на основании инвариантности  $\tilde{\mu}$  относительно  $T_1$  мы можем рассматривать

$$\tilde{H} \left( \bigvee_{a \leq m \leq a+r} \xi_m^{(0)} \middle| \bigvee_{\substack{n < 0 \\ a + \omega^{-1}n \leq m \leq \\ \leq a + \omega^{-1}n + 2s}} \xi_m^{(n)} \bigvee_{\substack{a + 2s - r \leq m \leq \\ \leq a + 2s}} \xi_m^{(0)} \right). \quad (1)$$

На основании теоремы Дуба о сходимости условных вероятностей

$$\tilde{\mu}(x_m^{(0)}, a \leq m \leq a+r | x_m^{(n)}, n < 0, a + \omega^{-1}n \leq m)$$

есть предел  $\tilde{\mu}$ -почти всюду условных вероятностей

$$\tilde{\mu}(x_m^{(0)}, a \leq m \leq a+r | x_m^{(n)}, n < 0, a + \omega^{-1}n \leq m \leq a + \omega^{-1}n + N) \quad (2)$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому при больших  $s$  и  $s \leq N \leq s+k$  эти условные вероятности «почти» не зависят от значений  $x_m^{(n)}, a + \omega^{-1}n + + 2s - r \leq m \leq a + \omega^{-1}n + 2s + r$ . Но условные вероятности

$$\tilde{\mu}(x_m^{(0)}, a \leq m \leq a+r | x_m^{(n)}, n < 0, a + \omega^{-1}n \leq m \leq a + \omega^{-1}n + 2s; x_m^{(0)}, a + 2s - r \leq m \leq a + 2s)$$

представляют собой линейные комбинации условных вероятностей типа (2) при различных значениях  $x_m^{(n)}, a + \omega^{-1}n + + 2s - r \leq m \leq a + \omega^{-1}n + 2s + r$ , с весами, зависящими главным образом от переменных  $x_m^{(n)}$ , где  $m$  и  $n < 0$  пробегает относительно небольшую окрестность множества точек  $a + 2s - r \leq m \leq a + \omega^{-1}n + r, n = 0$ . Поэтому (1) при  $s \rightarrow \infty$  сходится к  $\tilde{H}(I(a, \omega))$ . Тем самым первая формула в формулировке леммы 5 доказана. Вторая формула из первой непосредственно следует, поскольку  $\tilde{H}(I(b, \omega))$  постоянна на каждом интервале длины  $q^{-1}$  значений  $b$ , где полупрямая  $\Gamma(b, \omega)$  не проходит через точки решетки  $\mathbf{Z}^2$ . При этом  $H_r$  непрерывна справа, а  $H_l$  непрерывна слева как функции  $b$ .

Вернемся теперь к вопросу Милнора. Пусть вначале  $n_1^{(i)}/n_2^{(i)}$  стремится к  $c$  монотонно, т. е. либо  $n_1^{(i)}/n_2^{(i)} \uparrow c$ , либо  $n_1^{(i)}/n_2^{(i)} \downarrow c$ .

**Теорема 1.** В этих условиях существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h(T_1^{n_1^{(i)}} \cdot T_2^{n_2^{(i)}})}{\sqrt{(n_1^{(i)})^2 + (n_2^{(i)})^2}}.$$

**Доказательство.** На основании леммы 5

$$\frac{h(T_1^{n_1^{(i)}} \cdot T_2^{n_2^{(i)}})}{\sqrt{(n_1^{(i)})^2 + (n_2^{(i)})^2}} = \frac{n_2^{(i)}}{\sqrt{(n_1^{(i)})^2 + (n_2^{(i)})^2}} \cdot \int_0^1 \tilde{H}(I(b, \omega_i)) db,$$

где  $\omega_i = n_2/n_1^{(i)}$ . Первый сомножитель при  $i \rightarrow \infty$  стремится к  $(c^2 + 1)^{-1/2}$ . Второй сомножитель также сходится к пределу. В самом деле,  $H(I(b, \omega_i)) = H_r(I(b, \omega_i)) + H_l(I(b, \omega_i))$ , и при любом  $b$  каждое слагаемое ограничено и монотонно по  $i$  в силу монотонности  $n_1^{(i)}/n_2^{(i)}$ . Следовательно,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{H}(I(b, \omega_i))$  существует, и тем самым теорема доказана.

Приведенные выше рассуждения близко следуют моей статье [4]. Как заметила К. Парк [5], пределы разбиений

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m \geq b - \frac{n}{\omega_i}} \xi_m^{(-n)} \quad \text{или} \quad \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m \leq b - \frac{n}{\omega_i}} \xi_m^{(-n)}$$

при  $i \rightarrow \infty$  могут быть, в принципе, различны, в зависимости от того, как  $\omega_i$  сходится к пределу. Если эти разбиения возрастают при  $i \rightarrow \infty$ , то они сходятся к разбиению

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m \geq b - \frac{n}{\omega_i}} \xi_m^{(-n)} \quad \text{или} \quad \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m \leq b - \frac{n}{\omega_i}} \xi_m^{(-n)}.$$

Если же они убывают, то может возникнуть предельное разбиение, большее соответствующего разбиения. Если такое действительно возможно, то предел в теореме 1 может зависеть от способа предельного перехода. Справедлива, однако, следующая теорема.

**Теорема 2.** *Для почти всех (по мере Лебега) с предел в теореме не зависит от способа предельного перехода.*

**Доказательство.** Зафиксируем  $b$  и рассмотрим  $H_r(I(b, \omega))$ . На любом интервале по  $\omega$ , где разбиение, для которого вычисляется условная энтропия, не зависит от  $\omega$ , функция  $H_r(I(b, \omega))$  не возрастает как функция  $\omega$  и равномерно ограничена. Поэтому существует не более счетного числа значений  $\omega_j(b)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , где эта функция разрывна. Аналогичное утверждение справедливо для  $H_l(I(b, \omega))$ . Поэтому в пространстве пар  $(b, \omega)$  лебегова мера множества тех точек, где  $H_r(I(b, \omega))$  или  $H_l(I(b, \omega))$  разрывна как функция  $\omega$ , равна 0. На основании теоремы Фубини для почти всех  $\omega$  множество тех  $b$ , где  $H(I(b, \omega))$  разрывно (как функция  $\omega$ ), имеет меру 0. Если  $H(I(b, \omega))$  почти всюду (по  $b$ ) непрерывна в точке  $\omega$ , то предел в теореме 1 не зависит от способа предельного перехода. Теорема 2 доказана.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Энтропия динамических систем с многомерным временем систематически изучалась впервые в работе

[1] Conze J. P. Entropie d'un groupe abélien de transformation // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.—1972.—Bd. 25.—S. 11—30.



2° Понятие естественного расширения эндоморфизма было введено В. А. Рохлиным в его работе

[2] Рохлин В. А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961.—Т. 25.—С. 499—530. См. также

[3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука, 1980.—384 с.

3° Обсуждение вопроса Милнора см. в статье

[4] Sinai Ya. G. An answer to a question by J. Milnor // Comment Math. Helvetica.—1985.—V. 60.—P. 173—178.

В этой статье имеется неточность, на которую обратила мое внимание К. Парк:

[5] Park K. Letter (письмо автору).

Изложение в лекции исправлено с учетом этого замечания К. Парк.

В неопубликованной интересной работе Туveno построен пример двух коммутирующих автоморфизмов  $T_1, T_2$ , для которых

$$1) \frac{h(T_1^p T_2^q)}{\sqrt{p^2 + q^2}} > 1 \text{ для любых двух взаимно простых } p, q;$$

$$2) h(T_1^r T_2^s) = 0, \text{ если } r, s \text{ таковы, что } ps - qr \neq 0.$$

## ЧАСТЬ III

### ОДНОМЕРНАЯ ДИНАМИКА

В этой части мы рассматриваем динамические системы, отвечающие одномерным отображениям, т. е., как правило, отображениям отрезка или окружности. Теория таких отображений содержит много красивых и глубоких результатов. О некоторых из них и идет речь ниже.

#### ЛЕКЦИЯ 9

##### НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И ДРОБИ ФАРЕЯ

Во многих современных исследованиях теории динамических систем большую роль играют свойства разложений действительных чисел в цепные дроби и тесно связанные с ними дроби Фарей. Поэтому имеет смысл посвятить соответствующим вопросам отдельную лекцию. Впоследствии мы неоднократно будем обращаться к результатам, которые здесь будут установлены.

Возьмем  $\omega \in [0, 1]$ . Его разложением в цепную дробь называется представление  $\omega$  в виде

$$\omega = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{k_4 + \dots}}}}$$

где все  $k_s \geq 1$  целые. Это представление обычно записывается в виде  $\omega = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$ . Цепная дробь конечна тогда и только тогда, когда  $\omega$  рационально. Элементы цепной дроби  $k_s$  находятся последовательно из соотношений  $\omega = \omega_0$ ,

$\omega_{n+1} = \left\{ \frac{1}{\omega_n} \right\}$ ,  $k_{n+1} = \left[ \frac{1}{\omega_n} \right]$ , где  $\{ \}$ ,  $[ \ ]$ , как всегда, обозначения

для дробной и целой части числа. Мы видим, что процесс образования непрерывной дроби тесно связан с отображением

$T$  отрезка  $[0, 1]$  на себя, определяемым формулой  $\omega \mapsto \left\{ \frac{1}{\omega} \right\}$ .

В частности,  $T\omega = [k_2, k_3, \dots, k_n, \dots]$ . Эргодические свойства  $T$  будут обсуждаться чуть ниже. Сейчас мы обсудим геометрическую конструкцию чисел  $k_n$ . Напишем

$$\omega = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots],$$

$$\omega_n = [k_1, k_2, \dots, k_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Число  $\omega_n$  называется  $n$ -й подходящей дробью числа  $\omega$ . Хорошо известно, что  $\omega_n$  осуществляют наилучшие аппроксимации  $\omega$  рациональными числами со знаменателем, не превосходящим  $q_n$ , в том смысле, что  $|\omega - \omega_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ . Числа  $q_n$  связаны друг с другом посредством цепочки соотношений

$$q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1} \quad (1)$$

с начальными условиями  $q_{-1} = 0$ ,  $q_0 = 1$ .

Пусть  $S^1$  есть единичная окружность. Обозначим через  $R_\omega$  поворот  $S^1$  на угол  $\omega$ , т. е.  $R_\omega \alpha = \alpha + \omega \pmod{1}$ . В этом обозначении предполагается, что  $\alpha \in [0, 1)$ . Неравенства

$$k_1 \omega \leq 1 < (k_1 + 1) \omega$$

означают, что  $S^1$  может быть покрыта  $(k_1 + 1)$  дугами длины  $\omega$  и не может быть покрыта  $k_1$  такими дугами. Фиксируем точку  $O \in S^1$  и обозначим через  $\Delta_1^{(0)}$  дугу, концами которой служат точки  $O$  и  $\omega + O$ . Тогда  $\Delta_i^{(0)} = R_\omega^{i-1} \Delta_1^{(0)}$ ,  $1 \leq i \leq k_1$ , представляют собой неперекрывающиеся, примыкающие друг к другу дуги длины  $\omega$ . Обозначим  $\Delta_1^{(1)}$  дугу, концами которой служат  $\omega_1 k_1$  и  $O$  (см. рис. 9.1). Отношение длин  $\Delta_1^{(0)}$ ,  $\Delta_1^{(1)}$  равно

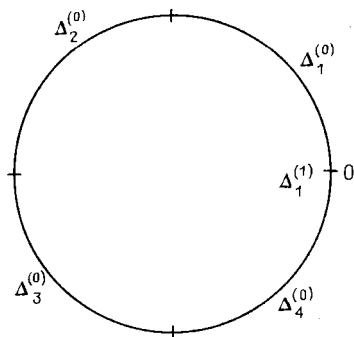


Рис. 9.1

$$\frac{l(\Delta_1^{(1)})}{l(\Delta_1^{(0)})} = \frac{1 - k_1 \omega}{\omega} = \frac{1 - \frac{k_1}{k_1 + [k_2, \dots, k_n, \dots]}}{\frac{1}{k_1 + [k_2, \dots, k_n, \dots]}} = [k_2, \dots, k_n, \dots] = T\omega.$$

Мы видим также, что  $l(\Delta_1^{(1)}) < l(\Delta_1^{(0)})$ . Таким же образом мы можем построить максимально возможное число

примыкающих дуг длины  $l(\Delta_1^{(1)})$ , начиная с левой границы  $\Delta_1^{(0)}$  (см. рис. 9.2). Обозначим их число через  $m$ . Тогда

$$ml(\Delta_1^{(1)}) \leq l(\Delta_1^{(0)}) < (m+1)l(\Delta_1^{(1)})$$

или

$$m \leq \frac{1}{T\omega} = \frac{l(\Delta_1^{(0)})}{l(\Delta_1^{(1)})} < m+1.$$

Это показывает, что  $m = \left[ \frac{1}{T\omega} \right] = k_2$ .

Обозначим через  $\Delta_1^{(2)}$  оставшуюся дугу. Тогда

$$\frac{l(\Delta_1^{(2)})}{l(\Delta_1^{(1)})} = \frac{l(\Delta_1^{(2)})}{l(\Delta_1^{(0)})} \cdot \frac{l(\Delta_1^{(0)})}{l(\Delta_1^{(1)})} = \frac{1 - k_2 \frac{l(\Delta_1^{(1)})}{l(\Delta_1^{(0)})}}{T\omega} = \frac{1 - k_2 T\omega}{T\omega} = [k_3, k_4, \dots] = T^2\omega.$$

Теперь уже ясно, что все  $k_n$  могут быть построены с помощью

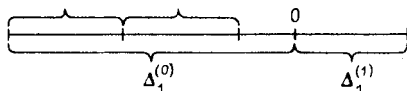


Рис. 9.2

некоторого варианта алгоритма Евклида. А именно, допустим, что уже построены дуги  $\Delta_1^{(n-1)}$ ,  $\Delta_1^{(n)}$ , имеющие  $O$  своим общим концом и лежащие по разные стороны  $O$ , и

$$\frac{l(\Delta_1^{(n)})}{l(\Delta_1^{(n-1)})} = T^n\omega = [k_n, k_{n+1}, \dots].$$

Начав с конца  $\Delta_1^{(n-1)}$ , отличного от  $O$ , построим множество примыкающих дуг, равных  $\Delta_1^{(n)}$ , в максимально возможном числе и обозначим оставшуюся дугу через  $\Delta_1^{(n+1)}$ . Если  $m$  есть число таких дуг, то

$$ml(\Delta_1^{(n)}) \leq l(\Delta_1^{(n-1)}) < (m+1)l(\Delta_1^{(n)})$$

или

$$m = \left[ \frac{l(\Delta_1^{(n-1)})}{l(\Delta_1^{(n)})} \right] = \left[ \frac{1}{T^n\omega} \right] = k_n$$

и

$$\frac{l(\Delta_1^{(n+1)})}{l(\Delta_1^{(n)})} = \frac{l(\Delta_1^{(n-1)}) - k_n l(\Delta_1^{(n)})}{l(\Delta_1^{(n)})} = \frac{1}{T^n\omega} - \left[ \frac{1}{T^n\omega} \right] = \left\{ \frac{1}{T^n\omega} \right\} = T^{n+1}\omega.$$

Одним из концов каждой дуги  $\Delta_1^{(n)}$  служит  $O$ . Покажем, что другой конец есть  $R_\infty O$ . При  $n=1, 2$  это легко следует из определений. Для произвольного  $n$  воспользуемся индукцией.

Допустим, что для  $\Delta_1^{(n-1)}$ ,  $\Delta_1^{(n)}$  наше утверждение доказано. Из конструкции и индуктивного предположения вытекает, что первая дуга длины  $l(\Delta_1^{(n)})$ , которая имеет одним из своих концов  $R_\omega^{q_n-1}O$ , может быть представлена как  $R_\omega^{q_n-1}\Delta_1^{(n)}$ . Последующие дуги имеют вид  $R_\omega^{q_{n-1}+q_n}(\Delta_1^{(n)})$ ,  $R_\omega^{q_{n-1}+2q_n}(\Delta_1^{(n)})$ , ...,  $R_\omega^{q_{n-1}+(k_{n+1}-1)q_n}(\Delta_1^{(n)})$ . Дуга  $R_\omega^{q_{n-1}+k_{n+1}q_n}(\Delta_1^{(n)})$  покрывает  $O$ . Поэтому ее конец, принадлежащий  $\Delta_1^{(n)}$ , есть  $R_\omega^{q_{n-1}+k_{n+1}q_n}O = R_\omega^{q_{n+1}}O$  ввиду рекуррентных соотношений (1).

Положим  $\Delta_i^{(n)} = R_\omega^{i-1}\Delta_1^{(n)}$ .

**Теорема 1.** Система открытых дуг  $\Delta_i^{(n-1)}$ ,  $1 \leq i \leq q_n$ ,  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $1 \leq j \leq q_{n-1}$ , обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \Delta_{i_1}^{(n-1)} \cap \Delta_{i_2}^{(n-1)} = \emptyset, \quad i_1 \neq i_2;$$

$$\Delta_{j_1}^{(n)} \cap \Delta_{j_2}^{(n)} = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2;$$

$$\Delta_{j_1}^{(n)} \cap \Delta_{j_2}^{(n-1)} = \emptyset \quad \text{при всех рассматриваемых } j_1, j_2;$$

$$2) \quad \bigcup_{i=1}^{q_n} \Delta_i^{(n-1)} \cup \bigcup_{j=1}^{q_{n-1}} \Delta_j^{(n)} = S^1 \pmod{0}.$$

**Доказательство.** При  $n=1, 2$  утверждение теоремы следует из определений и конструкции. Рассуждая по индукции, мы должны рассмотреть  $\Delta_i^{(n)}$ ,  $1 \leq i \leq q_{n+1}$ ,  $\Delta_j^{(n+1)}$ ,  $1 \leq j \leq q_n$ . Из конструкции также следует, что среди всех дуг  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $1 \leq j \leq q_{n+1}$ , только непересекающиеся дуги  $\Delta_{1+jq_{n-1}+jq_n}^{(n)}$ ,  $0 \leq j < k_{n+1}-1$ , принадлежат  $\Delta_1^{(n-1)}$  и лежат вне  $\Delta_1^{(n+1)}$ . Следовательно, все дуги  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $1 \leq j \leq q_{n+1}$ , не пересекаются с  $\Delta_1^{(n+1)}$ . Первое непустое пересечение  $\Delta_1^{(n)} \cap \Delta_{i_1}^{(n)} \neq \emptyset$  происходит только при  $i_1 = 1 + q_{n-1} + k_{n+1}q_n = 1 + q_{n+1} > q_{n+1}$ . Тем самым  $\Delta_{i_1}^{(n)} \cap \Delta_{i_2}^{(n)} = \emptyset$  при всех  $i_1 \neq i_2$ ,  $1 \leq i_1, i_2 \leq q_{n+1}$ .

Используя тот факт, что конец  $\Delta_1^{(n)}$ , отличный от  $O$ , есть  $R_\omega^{q_n}O$ , легко получаем, что  $\Delta_{1+q_n}^{(n+1)} \subset \Delta_1^{(n)}$  и  $\Delta_{i_1}^{(n+1)} \cap \Delta_1^{(n)} = \emptyset$  при  $1 < i_1 \leq q_n$ . Таким образом, все  $\Delta_{i_1}^{(n)}$ ,  $1 \leq i_1 \leq q_{n+1}$ , не пересекаются между собой и не пересекаются со всеми  $\Delta_{j_1}^{(n+1)}$ ,  $1 \leq j_1 \leq q_n$ . Остается только показать, что  $\Delta_{j_1}^{(n+1)} \cap \Delta_{j_2}^{(n+1)} = \emptyset$  при  $1 \leq j_1, j_2 \leq q_n$ ,  $j_1 \neq j_2$ . Это эквивалентно тому, что  $\Delta_1^{(n+1)} \cap \Delta_j^{(n+1)} = \emptyset$  при всех  $1 \leq j \leq q_n$ . Но опять-таки, как следует из конструкции, непустое пересечение  $\Delta_1^{(n+1)} \cap \Delta_i^{(n+1)}$  возможно только при  $i > q_{n+1}$ . Тем самым 1) полностью доказано.

Для доказательства 2) снова используем индукцию. Из индуктивного предположения следует, что  $\bigcup_{i=1}^{q_n} \Delta_i^{(n-1)} \cup \bigcup_{j=1}^{q_{n-1}} \Delta_j^{(n)} = S^1 \pmod{0}$ . Заметим теперь, что

$$\Delta_1^{(n-1)} = \bigcup_{l=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{1+q_{n-1}+lq_n}^{(n)} \cup \Delta_1^{(n+1)}.$$

Поэтому при всех  $1 \leq j \leq q_n$

$$\Delta_j^{(n-1)} = \bigcup_{l=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{j+q_{n-1}+lq_n}^{(n)} \cup \Delta_j^{(n+1)}.$$

и

$$\begin{aligned} S^1 &= \bigcup_{i=1}^{q_n} \Delta_i^{(n-1)} \cup \bigcup_{j=1}^{q_{n-1}} \Delta_j^{(n)} = \\ &= \bigcup_{j=1}^{q_n} \Delta_j^{(n+1)} \cup \bigcup_{j=1}^{q_n} \bigcup_{l=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{j+q_{n-1}+lq_n}^{(n)} \cup \bigcup_{j=1}^{q_{n-1}} \Delta_j^{(n)} = \\ &= \bigcup_{j=1}^{q_n} \Delta_j^{(n+1)} \cup \bigcup_{i=1}^{q_{n+1}} \Delta_i^{(n)} \pmod{0}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через  $\xi_n$  разбиение окружности  $S^1$  на дуги  $\Delta_i^{(n-1)}$ ,  $1 \leq i \leq q_n$ , и  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $1 \leq j \leq q_{n-1}$ . Тогда  $\xi_2 \leq \xi_3 \leq \dots \leq \xi_n \dots$  и  $\bigvee_n \xi_n = \varepsilon \pmod{0}$  (см. лекцию 2). Последнее утверждение в полном объеме будет доказано в следующей лекции. Опишем теперь своеобразную символическую динамику точек  $S^1$ , строящуюся при помощи последовательности разбиений  $\xi_n$ .

Возьмем  $\omega \in S^1$ , не принадлежащую счетному множеству концов всех дуг  $\Delta_i^{(n)}$ . Положим

$$e_n(\omega) = -1, \quad \text{если} \quad \omega \in \bigcup_{j=1}^{q_{n-1}} \Delta_j^{(n)}.$$

Если  $\omega \in \Delta_i^{(n-1)}$  при некотором  $i$ ,  $1 \leq i \leq q_n$ , то в силу конструкции

$$\Delta_i^{(n-1)} = \bigcup_{j=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{q_{n-1}+jq_n+i}^{(n)} \cup \Delta_i^{(n+1)},$$

и дуги в правой части последнего равенства не пересекаются. Положим  $e_n(\omega) = j$ ,  $0 \leq j < k_{n+1}$ , если  $\omega \in \Delta_{q_{n-1}+jq_n+i}^{(n)}$ , и  $e_n(\omega) = k_{n+1}$ , если  $\omega \in \Delta_i^{(n+1)}$ . Тем самым  $e_n(\omega)$  принимает  $k_{n+1} + 1$  значений. Легко проверить, что соответствие

$$\omega \Leftrightarrow (e_2(\omega), e_3(\omega), \dots, e_n(\omega), \dots) = e$$

взаимно-однозначно в том смысле, что разные  $\omega$  имеют разные символические представления  $e$ .

Пусть  $l$  — лебегова мера на  $S^1$ . Она порождает распределение вероятностей в пространстве последовательностей  $e$ . Можно показать, что для типичных  $\omega$ , например для тех  $\omega$ ,

для которых  $k_n \leq \text{const} \cdot n^\gamma$  при некотором  $\gamma > 0$ , это распределение вероятностей обладает хорошими свойствами перемешивания. Мы не останавливаемся на этом подробно.

*Лемма.* Возьмем любое  $\gamma > 1$ . Для почти каждого  $\omega$  можно найти постоянную  $C = C(\omega)$  такую, что

$$k_n \leq Cn^\gamma.$$

*Доказательство.* Ввиду леммы Бореля—Кантелли достаточно доказать, что  $k_n < n^\gamma$  при всех достаточно больших  $n$ . Пусть  $\mu$ —инвариантная мера для  $T$ ,  $d\mu = \frac{d\omega}{(1+\omega)\ln 2}$  (см. лекцию 1). Из инвариантности  $\mu$  имеем

$$\mu\{\omega | k_n \geq n^\gamma\} = \mu\{\omega | k_1 \geq n^\gamma\} \sim \frac{\text{const}}{n^\gamma}.$$

При  $\gamma > 1$  правая часть представляет собой член сходящегося ряда и лемма Бореля—Кантелли дает нужный результат.

Нетрудно показать, что  $T$  есть точный эндоморфизм пространства с мерой  $(S^1, \rho(\omega)d\omega)$ ,  $\rho(\omega) = \frac{1}{(1+\omega)\ln 2}$ . Близкое утверждение доказывается в лекции 12.

Теперь мы обсудим вкратце дроби Фарея и относящееся к ним дерево Фарея, а также их связь с теорией цепных дробей. Дроби Фарея иногда используются при применении метода ренормгруппы в теории динамических систем. Запишем рациональное число  $p/q$  в виде  $(p, q)$ . Суммой Фарея или медианой двух рациональных чисел  $(p_1, q_1)$  и  $(p_2, q_2)$  называется рациональное число  $(p_1 + q_1, p_2 + q_2)$  или  $(p_1, q_1) \oplus (p_2, q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ .

Возьмем два простейших числа  $(0, 1) = 0$  и  $(1, 1) = 1$ . Соединяющий их отрезок назовем отрезком нулевого уровня. Взяв медиану от концов этого отрезка  $(0, 1) \oplus (1, 1) = (1, 2)$ , разобьем его на два отрезка первого уровня. Затем каждый отрезок первого уровня разбиваем на два отрезка второго уровня, взяв медиану его концов, и т. д. На  $n$ -м уровне мы будем иметь  $2^n$  отрезков  $n$ -го уровня. Ясно, что конец каждого отрезка есть рациональное число. Более того, можно показать, что любое рациональное число служит концом одного из отрезков какого-либо уровня. При этом процессе максимальная длина отрезков  $n$ -го уровня стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ .

Используя отрезки Фарея, мы можем построить соответствующую символическую динамику. А именно, возьмем иррациональное число  $\omega \in [0, 1]$ . Полагаем  $f_1(\omega) = 0$ , если  $\omega < 1/2$ , и  $f_1(\omega) = 1$  в противном случае. Допустим, что мы уже

определили  $f_1(\omega), \dots, f_{n-1}(\omega)$  и  $\omega \in I_{n-1}$ , где  $I_{n-1}$  — один из отрезков Фарея  $(n-1)$ -го уровня. Тогда  $I_{n-1}$  распадается на два отрезка  $I_n, I_n''$   $n$ -го уровня. Полагаем  $f_n(\omega)=0$ , если  $\omega$  принадлежит левому отрезку, и  $f_n(\omega)=1$  в противоположном случае. Таким образом,  $\omega$  кодируется бесконечной последовательностью  $f(\omega)=(f_1(\omega), f_2(\omega), \dots, f_n(\omega), \dots)$ , и это кодирование взаимно-однозначно на множестве иррациональных чисел.

Введем отображение  $F$ , отвечающее построенной символической динамике. А именно, если  $\omega \Leftrightarrow f(\omega)$ , то  $F(\omega) \Leftrightarrow (f_2(\omega), \dots)$ . Нетрудно проверить, что

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{1-\omega} & \text{при } \omega < 1/2, \\ 2 - \frac{1}{\omega} & \text{при } \omega > 1/2. \end{cases}$$

В. Л. Волевич показал мне плотность инвариантной абсолютной непрерывной меры для  $F$ . Она имеет вид

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{1-\omega}.$$

Ясно, что  $\int_0^1 \rho(\omega) d\omega = \infty$ . Это связано с тем, что траектория слишком медленно движется в окрестности точек  $\omega=0, 1$ . Более интересные эргодические свойства появляются, если перейти к так называемым производным отображениям, строящимся для некоторых интервалов. В. Л. Волевич имеет ряд результатов в этом направлении.

Аппроксимации Фарея тесно связаны с непрерывными дробями. Можно показать, что концы отрезков  $n$ -го уровня отвечают конечным цепным дробям, у которых сумма элементов  $k_n$  равна  $n$ .

Вспомним наше обозначение  $\Delta_1^{(n)}$  для отрезка, концами которого служат  $O$  и  $R_\omega^{q_n} O$ , и равенство

$$\Delta_1^{(n-1)} = \bigcup_{j=0}^{k_{n+1}-1} R_\omega^{q_{n-1} + jq_n} \Delta_1^{(n)} \cup \Delta_1^{(n+1)}.$$

Тогда аппроксимациями Фарея, т. е. конечными словами  $(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$ , служат

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{2p_n + p_{n-1}}{2q_n + q_{n-1}}, \dots, \frac{(k_{n+1}-1)p_n + p_{n-1}}{(k_{n+1}-1)q_n + q_{n-1}}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \dots$$

Эти числа являются концами отрезков  $R_\omega^{q_{n-1} + jq_n} \Delta_1^{(n)}$ .



## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

Эргодические свойства отображения  $T\omega = \left\{ \frac{1}{\omega} \right\}$  изучались интенсивно в течение многих лет. Последние результаты касаются анализа убывания корреляций

$$\int \varphi(T^n \omega) \varphi(\omega) \frac{d\omega}{\ln 2 \cdot (1+\omega)} - \left( \int \varphi(\omega) \frac{d\omega}{\ln 2 \cdot (1+\omega)} \right)^2$$

для различных классов функций; см., например,

Mayer D., Roesstorff G. On the Relaxation Time of Gauss Continued-Fraction Map // Journal of Statistical Physics.—1987.—V. 47.—P. 149; 1988.—V. 50.—P. 331—345.

Интересные обобщения цепных дробей изучались с точки зрения эргодической теории С. Ито, Г. Накада, С. Танака; см., например, Nakada H. On Ergodic Theory of A. Schmidt's Complex Continued Fractions over Gaussian Field.—Preprint.—Keio University, 1987.

Теория дробей Фарея излагается, например, в книге Бухштаб А. А. Теория чисел.—М.: Просвещение, 1966.

Хорошее введение в весь этот круг вопросов содержится в статье Kim S., Ostlund S. Simultaneous rational approximants for physicists // Phys. Rev.—1986.—V. A34.—P. 3426—3434.

## ЛЕКЦИЯ 10

### ГОМЕОМОРФИЗМЫ И ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ОКРУЖНОСТИ

В этой лекции мы обсудим свойства одного из простейших классов динамических систем — гомеоморфизмов окружности. Соответствующая теория была начата Пуанкаре, Данжуа и в настоящее время излагается во многих учебниках и монографиях. Поэтому здесь мы в основном остановимся на более поздних исследованиях.

Предположим, что  $\varphi$  есть строго возрастающая непрерывная функция, заданная на  $\mathbf{R}^1$ , для которой  $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1$ . Она определяет гомеоморфизм  $T_\varphi$  окружности  $M = S^1$ , действующий по формуле  $x \mapsto \{\varphi(x)\}$  и  $T_\varphi x = \{\varphi(x)\}$ .

**Т е о р е м а 1** (Пуанкаре). *Для каждого  $x$  существует предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \underbrace{\varphi(\varphi(\dots \varphi(x) \dots))}_{n \text{ раз}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi^{(n)}(x) = \omega,$$

*не зависящий от  $x$ .*

Число  $\omega$  характеризует среднее вращение за один шаг и по этой причине называется числом вращения. На протяжении этой лекции мы будем предполагать, что  $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^1)$ ,  $\varphi'(x) \geq \text{const} = C_0 > 0$ , не оговаривая этого снова. Заметим, что  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  — периодические функции  $x$ .

**Теорема 2** (Пуанкаре). Если  $\omega$  рационально,  $\omega = p/q$ , то  $T_\phi$  имеет хотя бы одну периодическую траекторию периода  $q$  и каждая траектория притягивается к периодической траектории, когда время стремится к  $\pm \infty$ .

Эта теорема показывает, что случай  $T_\phi$  с рациональным  $\omega$  не интересен с точки зрения эргодической теории, и поэтому в дальнейшем рассматриваются только  $T_\phi$  с иррациональными  $\omega$ .

**Теорема 3** (Данжуа). Если  $\omega$  иррационально, то  $T_\phi$  топологически сопряжено с вращением  $R_\omega$  окружности  $S^1$  на угол  $\omega$ .

Утверждение теоремы означает, что существует такая непрерывная строго монотонная функция  $\psi$ ,  $\psi(x+1) = \psi(x) + 1$ , для которой

$$\psi(\phi(x)) = \psi(x) + \omega. \quad (1)$$

Если  $y = \psi(x)$  принять за новую координату на  $S^1$ , то  $T_\phi$ , выраженное в этой координате, сводится к повороту на угол  $\omega$ , т. е.  $T_\phi y = y + \omega = R_\omega y$ . Возьмем  $x_0 \in S^1$  и ее траекторию  $\{x_k\}$ ,  $x_k = T_\phi^k x_0$ . Одна из основных частей доказательства теоремы 3 состоит в том, что для любого  $n$  порядок точек  $x_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , такой же, как порядок точек  $x'_k = \{x'_0 + k\omega\}$ . Иными словами,  $x_k$  находится между  $x_{k_1}$  и  $x_{k_2}$  тогда и только тогда, когда  $x'_k$  находится между  $x'_{k_1}$  и  $x'_{k_2}$ . Существенная проблема в теории гомеоморфизмов окружности состоит в выяснении связи между гладкостью  $\phi$ , свойствами числа  $\omega$  и классом гладкости приводящего гомеоморфизма  $\psi$ . Иногда эта проблема называется проблемой Арнольда. Основное содержание этой лекции посвящено доказательству упрощенного варианта известной теоремы М. Эрмана.

**Теорема 4.** Пусть  $\phi \in C^{2+\nu}$  при некотором  $\nu > 0$ . Напишем разложение  $\omega$  в непрерывную дробь

$$\omega = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$$

и допустим, что  $k_s \leq \text{const} \cdot s^a$  при некотором  $a > 0$ . Тогда  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^1)$ .

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\frac{r(\phi(x))}{r(x)} = \phi'(x) \quad (2)$$

относительно неизвестной функции  $r$ .

**Теорема 4'.** В условиях теоремы 4 уравнение (2) имеет строго положительное непрерывное решение.

Покажем, как из теоремы 4' вытекает теорема 4. Уравнение (2) означает, что  $r$  есть плотность инвариантной меры  $T_\Phi$ , которую мы можем считать нормированной. Положим  $\psi(x) = \int_0^x r(u) du$ . Тогда  $\psi(x+1) = \psi(x) + 1$  и для  $x_2 > x_1$  из инвариантности меры следует

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} r(u) du = \int_{\Phi(x_1)}^{\Phi(x_2)} r(u) du = \psi(\Phi(x_2)) - \psi(\Phi(x_1)).$$

Это означает, что если  $y = \psi(x)$  рассматривать как новую координату на  $S^1$ , то расстояние между точками, измеренное с помощью  $y$ , не меняется в процессе динамики, т. е.  $T_\Phi$ , выраженное в переменной  $y$ , есть изометрия, которая может быть только вращением. Это вращение должно быть поворотом на угол  $\omega$ , поскольку число вращения не меняется при гомеоморфных заменах переменных.

Доказательство теоремы 4'. Вначале мы опишем основные конструкции и дадим формулировки основных лемм, из которых в конце будет вытекать теорема. Затем мы докажем эти леммы, приведем несколько исторических замечаний и дадим соответствующие ссылки.

Так как  $T_\Phi$  топологически сопряжено с поворотом  $R_\omega$ , то для  $T_\Phi$  можно построить такую же систему разбиений, как  $\xi_n$  (см. лекцию 9). Подчеркнем, что разбиения  $\xi_n$  зависели от выбора начальной точки. Сейчас эта зависимость для нас будет существенна, и мы будем использовать для нее специальное обозначение. Например,  $\Delta_1^{(n)}(x)$  есть отрезок с концами  $x$  и  $T_\Phi^n x$ ,  $\Delta_1^{(n)}(x) = T_\Phi^i \Delta_1^{(n)}(x)$ ,  $\xi_n(x)$  и т. д.

Возьмем теперь произвольную точку  $x_0 \in S^1$  и ее полутраекторию  $O = \{x_k\}_0^\infty$ ,  $x_k = T_\Phi^k x_0$ , которая всюду плотна на  $S^1$ . Положим  $r(x) = 1$  и  $r(x_n) = \prod_{k=0}^{n-1} (\Phi'(x_k))^{-1}$ . Тогда  $r$  определена на  $O$  и удовлетворяет (2). Мы покажем, что  $r$  непрерывна на  $O$  и может быть продолжена до непрерывной положительной функции на  $S^1$ .

Пусть  $\frac{p_n}{q_n}$  есть  $n$ -я подходящая дробь для  $\omega$ ,  $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ .

**Лемма 1** (Данжуа). Существует постоянная  $C > 0$ , зависящая только от  $\Phi$  и такая, что при всех  $n$  и всех  $x_0$

$$\exp\{-C\} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} \Phi'(x_i) \leq \exp\{C\}.$$

Доказательство. Положим

$$C = \text{Var} \ln \varphi' = \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \ln \varphi' \right| dx.$$

Фиксируем произвольную точку  $x_0$ , возьмем  $z_0 \in S^1$  и рассмотрим  $\sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(z_j)$ ,  $z_j = T_{\varphi}^j z_0$ . Мы покажем, что

$$\left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(z_j) - \sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(x_j) \right| \leq C.$$

Это дает утверждение леммы Данжуа, поскольку из

$$\int_{S^1} \prod_{j=0}^{q_n-1} \varphi'(y_j) dy_0 = \int_{S^1} \exp \left\{ \sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(y_j) \right\} dy_0 = 1$$

следует существование  $y_0$ , для которой  $\sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(y_j) = 0$ .

Пусть  $z_0 \in \Delta_i^{(n-1)}(x_0)$ ,  $1 \leq i \leq q_n$ . Каждому  $z_j$ ,  $0 \leq j \leq q_n - i$ , сопоставим точку  $x_{i+j}$ , лежащую в том же элементе  $\Delta_{i+j}^{(n-1)}(x_0)$ . Для каждого  $z_j$ ,  $q_n - i < j \leq q_n$ , возьмем точку  $x_{i+j-q_n}$ . Нетрудно непосредственно проверить, что интервалы, концами которых служат точки  $z_j$ ,  $x_{i+j}$ ,  $0 \leq j \leq q_n - i$ , и  $z_j$ ,  $x_{i+j-q_n}$ ,  $q_n - i < j \leq q_n$ , не пересекаются. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(z_j) - \sum_{j=0}^{q_n-1} \ln \varphi'(x_j) \right| &\leq \sum_{j=0}^{q_n-i} |\ln \varphi'(z_j) - \ln \varphi'(x_j)| + \\ &+ \sum_{q_n-i+1}^{q_n} |\ln \varphi'(z_j) - \ln \varphi'(x_j)| \leq \text{Var} \ln \varphi' = C. \end{aligned}$$

Если  $z_0 \in \Delta_i^{(n)}(x_0)$ ,  $1 \leq i \leq q_{n-1}$ , то мы используем соответствующие  $z_j \Leftrightarrow x_{j+i}$  при  $0 \leq j \leq q_n - i$  и  $z_j \Leftrightarrow x_{i+j-q_n}$ ,  $q_n - i < j \leq q_n$  и такие же соображения, что и выше. Лемма доказана.

Выведем из леммы Данжуа экспоненциальное (по  $n$ ) убывание длин  $\Delta_i^{(n)}$ . Положим  $\lambda = \lambda(C) = (1 + \exp\{-C\})^{-1/2}$ . Длина интервала  $\Delta$  обозначается, как обычно,  $l(\Delta)$ .

Лемма 2.  $l(\Delta_1^{(n)}(x)) \leq \lambda^{2k} l(\Delta_1^{(n-2k)}(x_0))$ ,  $0 \leq 2k \leq n$ .

Доказательство. Интервал  $\Delta_1^{(n-2)}(x_0)$  состоит из  $(k_n + 1)$  интервалов:

$$\Delta_1^{(n-2)}(x_0) = \Delta_1^{(n)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{k_n-1} \Delta_{q_{n-2} + s q_{n-1} + 1}^{(n-1)}(x_0).$$

Кроме того,  $\Delta_{q_{n-2}+k_n q_{n-1}+1}^{(n-1)}(x_0) = \Delta_{q_n+1}^{(n-1)}(x_0) \supset \Delta_1^{(n)}(x_0)$ . Из леммы Данжуа имеем

$$\begin{aligned} \exp \{-C\} &\leq \frac{l(\Delta_{q_n+1}^{(n)}(x_0))}{l(\Delta_{q_{n-2}+(k_n-1)q_{n-1}+1}^{(n-1)}(x_0))} = \\ &= \frac{1}{l(\Delta_{q_{n-2}+(k_n-1)q_{n-1}+1}^{(n-1)}(x_0))} \int \prod_{j=0}^{q_n-1} \varphi'(z_j) dz_0 \leq \exp \{C\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{l(\Delta_1^{(n)}(x_0))}{l(\Delta_1^{(n-2)}(x_0))} &\leq \frac{l(\Delta_1^{(n)}(x_0))}{l(\Delta_{q_{n-2}+(k_n-1)q_{n-1}+1}^{(n-1)}(x_0)) + l(\Delta_1^{(n)}(x))} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 + \frac{l(\Delta_{q_{n-2}+(k_n-1)q_{n-1}+1}^{(n-1)}(x_0))}{l(\Delta_1^{(n)}(x))}} \leq \frac{1}{1+e^{-C}} = \lambda^2. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. Для любого  $x_0 \in S^1$

$$l(\Delta_1^{(n)}(x_0)) \leq \lambda^{n-1}.$$

Следствие 2. Для любого элемента  $\Delta^{(n)}$  разбиения  $\xi_n(x_0)$

$$l(\Delta^{(n)}) \leq \lambda^{n-2}.$$

Доказательство. Если  $\Delta^{(n)} = \Delta_{i+1}^{(n-1)}(x_0)$ , то наше утверждение следует из легко проверяемого соотношения  $\Delta_{i+1}^{(n-1)}(x_0) = \Delta_1^{(n-1)}(x_i)$ . Если же  $\Delta^{(n)} = \Delta_{j+1}^{(n)}(x_0)$ , то по той же причине  $\Delta_{j+1}^{(n)}(x_0) = \Delta_1^{(n)}(x_j)$ . В обоих случаях результат вытекает из следствия 1.

Предположим теперь, что мы смогли усилить лемму Данжуа, показав, что для любой точки  $x_0$

$$\exp \{-\varepsilon_n\} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} \varphi'(x_i) \leq \exp \{\varepsilon_n\},$$

причем  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Лемма 3. Если  $\varepsilon_n$  стремятся к нулю настолько быстро, что  $\sum_m k_{m+1} \varepsilon_m < \infty$ , то  $r(x)$  может быть продолжена с 0 до положительной непрерывной функции на  $S^1$ .

Доказательство. Возьмем интервал  $\Delta_{i+1}^{(n-1)}$  с концами  $x_i, x_{i+q_{n-1}}$ . Внутри этого интервала имеется  $k_{n+1}$  точек вида  $x_{i+q_{n-1}+jq_n}$ ,  $1 \leq j \leq k_{n+1}$ , которые служат концами

соответствующих элементов разбиения  $\xi_{n+1}(x_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \exp\{-\varepsilon_n\} &\leq \frac{r(x_{i+q_{n-1}+(j-1)q_n})}{r(x_{i+q_{n-1}+jq_n})} = \prod_{m=i+q_{n-1}+(j-1)q_n}^{i+q_{n-1}+jq_n-1} \varphi'(x_m) \leq \\ &\leq \exp\{\varepsilon_n\}, \quad 1 \leq j \leq k_{n+1}, \\ \exp\{-\varepsilon_{n+1}\} &\leq \frac{r(x_{i+q_{n-1}+k_{n+1}q_n})}{r(x_i)} = \frac{r(x_{i+q_{n+1}})}{r(x_i)} \leq \exp\{\varepsilon_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Тем самым  $r(x_{i+q_{n-1}+jq_n})$ ,  $1 \leq j \leq k_{n+1}$ , отличается от  $r(x_i)$  множителем, ограниченным сверху и снизу числами  $\exp\{\pm \varepsilon_n(k_{n+1}-1) \pm \varepsilon_{n+1}\}$ . Поэтому для любого  $x_i \in \Delta_i^{(n-1)}$

$$\exp\left\{-\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1} \varepsilon_m\right\} \leq \frac{r(x_i)}{r(x_i)} \leq \exp\left\{\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1} \varepsilon_m\right\}.$$

Это означает, что  $r(x_i)$ ,  $i \geq 0$ , могут быть продолжены до непрерывной положительной функции  $r$  на  $S^1$ , что и требовалось доказать.

Лемма 3 показывает, что основная стратегия доказательства теоремы 4' состоит в усилении оценки в лемме Данжуа.

Теперь мы приведем формулировки нескольких лемм и ряд относящихся к ним замечаний, которые в конце дадут нужное нам утверждение. Всюду ниже пишем  $T$  вместо  $T_0$ .

Возьмем снова  $\xi_n(x_0)$ ,  $x_0 \in S^1$ . Пусть для определенности  $n$  четно. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(n-1)}(x_0) &= [x_{q_{n-1}}, x_0], \quad \Delta_i^{(n-1)}(x_0) = T^i \Delta_1^{(n-1)}(x_0) = \\ &= [x_{q_{n-1}+i}, x_i], \quad 1 \leq i \leq q_n; \\ \Delta_1^{(n)}(x_0) &= [x_0, x_{q_n}], \quad \Delta_{j+1}^{(n)}(x_0) = T^j \Delta_1^{(n)}(x_0) = \\ &= [x_j, x_{j+q_n}], \quad 1 \leq j \leq q_{n-1}. \end{aligned}$$

Введем относительные переменные  $z(i)$ ,  $1 \leq i \leq q_n+1$ , на интервалах  $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$  и относительные переменные  $\bar{z}(j)$ ,  $1 \leq j \leq q_{n-1}+1$ , на интервалах  $\Delta_j^{(n)}(x_0)$  с помощью формул

$$x = x_i - z(i)(x_i - x_{q_{n-1}+i}), \quad x = x_j + q_n - \bar{z}(j)(x_{q_n+j} - x_j).$$

Следующая лемма описывает действие  $T$  в относительных переменных.

**Л е м м а 4.** 1)  $z(i+1) = z(i)(1 + A_i(z(i)-1))$ ,  $1 \leq i \leq q_n$ , где

$$A_i = - \int_{x_i+q_{n-1}}^{x_i} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy + \eta_i, \quad |\eta_i| \leq \text{const} \cdot (I(\Delta_i^{(n-1)}))^{1+\nu};$$

$$2) \bar{z}(j+1) = \bar{z}(j) (1 + \bar{A}_j (\bar{z}(j) - 1)), \quad 1 \leq j \leq q_{n-1}, \quad \text{где}$$

$$\bar{A}_j = - \int_{x_j}^{x_{j+q_n}} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy + \bar{\eta}_j, \quad |\bar{\eta}_j| \leq \text{const} \cdot (l(\Delta_j^{(n)}))^{1+\nu}.$$

Эти оценки означают, что  $\eta_i, \bar{\eta}_j$  могут рассматриваться как остаточные члены. Следующая лемма показывает, что  $z(i), \bar{z}(j)$  с высокой точностью представляют собой дробно-линейные функции  $z(0), \bar{z}(0)$ . Обозначим

$$M(i) = \exp \left\{ \sum_{m=0}^{i-1} \int_{x_m}^{x_{m+q_n}} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy \right\},$$

$$\bar{M}(j) = \exp \left\{ \sum_{m=0}^{j-1} \int_{x_m}^{x_{m+q_n}} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy \right\}.$$

Лемма 5. 1) Для всех  $1 \leq i \leq q_n + 1$

$$z(i) = \frac{z(0) M(i) \exp \{ \tau^{(i)}(z_0) \}}{1 + z(0) (M(i) \exp \{ \tau^{(i)}(z_0) \} - 1)},$$

где  $|\tau^{(i)}(z_0)| \leq \text{const} \cdot [\max l(\Delta_m^{(n-1)}(x_0))]^\nu$ .

2) Для всех  $1 \leq j \leq q_{n-1} + 1$

$$\bar{z}(j) = \frac{\bar{z}(0) \bar{M}(j) \exp \{ \bar{\tau}^{(j)}(\bar{z}(0)) \}}{1 + \bar{z}(0) (\bar{M}(j) \exp \{ \bar{\tau}^{(j)}(\bar{z}(0)) \} - 1)},$$

где  $|\bar{\tau}^{(j)}(\bar{z}(0))| \leq \text{const} \cdot \left[ \max_{1 \leq m \leq q_{n-1}} l(\Delta_m^{(n)}(x_0)) \right]^\nu$ .

Заметим, что  $M(i), \bar{M}(j)$  не зависят от  $z(0), \bar{z}(0)$ . Вся зависимость от них содержится в  $\tau^{(i)}(z(0)), \bar{\tau}^{(j)}(\bar{z}(0))$ , которые также должны рассматриваться как остаточные члены. Обозначим  $l_n = \max_{x_0} l(\Delta_1^{(n)}(x_0))$ . Тогда  $|\tau^{(i)}| \leq \text{const} \cdot l_{n-1}^\nu, |\bar{\tau}^{(j)}| \leq \text{const} \cdot l_n^\nu$ .

Ввиду следствий 1, 2 из леммы 2  $l_n \leq \lambda^{n-1}$ . Теперь мы хотим выписать выражения для отображений

$$T^{q_n}: [x_{q_{n-1}}, x_0] \mapsto [x_{q_{n-1}+q_n}, x_{q_n}],$$

$$T^{q_{n-1}}: [x_0, x_{q_n}] \mapsto [x_{q_{n-1}}, x_{q_{n-1}+q_n}],$$

используя в окрестности точки  $x_0$  перенормированную переменную  $z = \frac{x - x_0}{x_0 - x_{q_{n-1}}}$ . Пусть  $a_n, -b_n$  равны перенормированным

координатам точек  $x_{q_n}$ ,  $x_{q_{n-1}+q_n}$ , т. е.

$$a_n = \frac{x_{q_n} - x_0}{x_0 - x_{q_{n-1}}}, \quad b_n = \frac{x_0 - x_{q_{n-1}+q_n}}{x_0 - x_{q_{n-1}}}$$

и  $f_n(z)$ ,  $g_n(z)$  — выражения для  $T^{q_n}$ ,  $T^{q_{n-1}}$ . Из леммы 5

$$f_n(z) = a_n + \frac{zM(q_n)\exp\{\tau^{(q_n)}(-z)\}}{1 - z(M(q_n)\exp\{\tau^{(q_n)}(-z)\} - 1)}(a_n + b_n), \quad (3)$$

$$g_n(z) = -b_n -$$

$$-\frac{\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\bar{M}(q_{n-1})\exp\left\{\bar{\tau}^{(q_{n-1})}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\right\}}{1 + \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\left(\bar{M}(q_{n-1})\exp\left\{\bar{\tau}^{(q_{n-1})}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\right\} - 1\right)}(1 - b_n). \quad (4)$$

Положим  $M_n = M(q_n)$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}(q_{n-1})$ ,  $\tau_n(z) = \tau^{(q_n)}(-z)$ ,  $\bar{\tau}_n(z) = -\bar{\tau}^{(q_{n-1})}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$  и перепишем (3), (4) следующим образом:

$$f_n(z) = \frac{a_n + (a_n + b_n M_n \exp\{\tau_n(z)\})z}{1 + z(1 - M_n \exp\{\tau_n(z)\})}, \quad (5)$$

$$g_n(z) = \frac{-a_n + (1 - b_n \bar{M}_n^{-1} \exp\{\bar{\tau}_n(z)\})z}{a_n + (\bar{M}_n^{-1} \exp\{\bar{\tau}_n(z)\} - 1)z}. \quad (6)$$

Используя тот факт, что

$$\begin{aligned} M_n \cdot \bar{M}_n &= \exp\left\{\sum_{m=0}^{q_n-1} \int_{x_m+q_n}^{x_m} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy + \sum_{m=0}^{q_n-1} \int_{x_m}^{x_m+q_n} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy\right\} = \\ &= \exp\left\{\int_{S^1} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy\right\} = 1, \end{aligned}$$

т. е.  $\bar{M}_n^{-1} = M_n$ , окончательно получаем

$$g_n(z) = \frac{-a_n + (1 - b_n M_n \exp\{\bar{\tau}_n(z)\})z}{a_n + (M_n \exp\{\bar{\tau}_n(z)\} - 1)z}. \quad (7)$$

Для нечетных  $n$  справедливы аналогичные формулы. Однако теперь

$$M_n = \exp\left\{-\sum_{m=0}^{q_n-1} \int_{x_m}^{x_m+q_{n-1}} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy\right\}.$$



Дифференцируя (5) и (7), получим

$$\frac{d}{dx}(T^{q_n})(x_0) = \prod_{i=0}^{q_n-1} \varphi'(x_i) = f'_n(0) = (a_n + b_n) M_n \exp \{\tau_n(0)\},$$

$$\frac{d}{dx}(T^{q_{n+1}})(x_0) = \prod_{i=0}^{q_{n+1}-1} \varphi'(x_i) = g'_n(0) = \frac{1-b_n}{a_n} M_n \exp \{\tau(0)\}.$$

Мы хотим теперь показать, что  $M_n$  и  $(a_n + b_n)$  стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Для этого сравним  $f_n$  и  $g_{n+1}$ . Обе функции отвечают одному и тому же преобразованию, но в разных координатах, т. е.

$$g_{n+1}(z) = -\frac{1}{a_n} f_n(-a_n z).$$

Мы используем это соотношение дважды:

$$g'_{n+1}(0) = f'_n(0), \quad (8)$$

$$g_{n+1}(a_{n+1}) = -\frac{1}{a_n} f_n(-a_n a_{n+1}) = -b_{n+1}. \quad (9)$$

Перепишем (8), (9), используя (5), (7):

$$\frac{1-b_{n+1}}{a_{n+1}} M_{n+1} \exp \{\bar{\tau}_{n+1}(0)\} = (a_n + b_n) M_n \exp \{\tau_n(0)\}, \quad (10)$$

$$\frac{-1 + (a_n + b_n M_n \exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\}) a_{n+1}}{1 - (1 - M_n \exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\}) a_n a_{n+1}} = -b_{n+1}. \quad (11)$$

Соотношение (11) дает

$$\frac{1-b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{(a_n + b_n) M_n \exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\}}{1 - (1 - M_n \exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\}) a_n a_{n+1}}.$$

Подставляя последнее выражение в (10), получим

$$M_{n+1} \exp \{\bar{\tau}_{n+1}(0) + \tau_n(-a_n a_{n+1})\} = \\ = [1 - (1 - M_n \exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\}) a_n a_{n+1}] \exp \{\tau_n(0)\}.$$

Обозначим  $c_n = 1 - M_n$ . Тогда

$$c_{n+1} - [\exp \{\bar{\tau}_{n+1}(0) + \tau_n(-a_n a_{n+1}) - \tau_n(0)\} - 1] M_{n+1} = \\ = a_n a_{n+1} [c_n - M_n (\exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\} - 1)]$$

или

$$c_{n+1} = a_n a_{n+1} c_n + [\exp \{\bar{\tau}_{n+1}(0) + \tau_n(-a_n a_{n+1}) - \tau(0)\} - 1] M_{n+1} - \\ - [\exp \{\tau_n(-a_n a_{n+1})\} - 1] M_n a_n a_{n+1}.$$

Положим

$$\xi_{n+1} = [\exp \{ \bar{\tau}_{n+1}(0) + \tau_n(-a_n a_{n+1}) - \tau_n(0) \} - 1] M_{n+1} - \\ - [\exp \{ \tau_n(-a_n a_{n+1}) \} - 1] M_n a_n a_{n+1}. \quad (12)$$

Тогда  $c_{n+1} = a_n a_{n+1} c_n + \xi_{n+1}$ .

Л е м м а 6.  $|\xi_n| \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv}$ .

Л е м м а 7.  $|c_n| \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv}$ .

Для  $\psi_n = \ln M_n$  мы имеем из леммы 7

$$|\psi_n| \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv} \quad (13)$$

Перепишем теперь (10) следующим образом:

$$\frac{1-b_{n+1}}{a_{n+1}} = (a+b_n) \exp \{ \psi_n + \tau_n(0) - \psi_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}(0) \}.$$

Если  $d_n = 1 - a_n - b_n$ , то

$$d_{n+1} = -a_{n+1} d_n + a_{n+1} (a_n + b_n) [\exp \{ \psi_n + \tau_n(0) - \\ - \psi_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}(0) \} - 1].$$

Обозначим  $\chi_{n+1} = (a_n + b_n) [\exp \{ \psi_n + \tau_n(0) - \psi_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}(0) \} - 1]$ .

Тогда

$$d_{n+1} = -a_{n+1} d_n + a_{n+1} \chi_{n+1}. \quad (14)$$

Л е м м а 8.  $|d_n| \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv}$ .

Лемма 7 явно показывает, что  $T^{q_n}$ , записанное в перенормированной переменной, почти линейно, а лемма 8 показывает, что его производная близка к 1.

Л е м м а 9.  $\exp \{ -\varepsilon_n \} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} \varphi'(x_i) \leq \exp \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n = \text{const} \cdot \lambda^{nv}$ .

Теперь утверждение теоремы следует из леммы 3 и леммы 9.

Оставшаяся часть лекции посвящена доказательствам лемм 4—9.

Доказательство леммы 4. Мы докажем только первое утверждение леммы, второе доказывается аналогично.

Пусть  $x_{i+q_{n-1}} = a_i$ ,  $x_i = c_i$ ,  $x = b_i \in [a_i, c_i]$ . Тогда  $z(i) = \frac{c_i - b_i}{c_i - a_i}$ ,

$$z(i+1) = \frac{c_{i+1} - b_{i+1}}{c_{i+1} - a_{i+1}}, \text{ где}$$

$$a_{i+1} = \varphi(a_i),$$

$$b_{i+1} = \varphi(b_i) = \varphi(a_i) + \varphi'(a_i)(b_i - a_i) + \int_{a_i}^{b_i} \varphi''(y)(b_i - y) dy,$$

$$c_{i+1} = \varphi(c_i) = \varphi(a_i) + \varphi'(a_i)(c_i - a_i) + \int_{a_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy.$$

Подставив правые части в выражение для  $z(i+1)$ , получим

$$\begin{aligned}
 z(i+1) = & \left( \varphi'(a_i)(c_i - b_i) + \int_{a_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy - \int_{a_i}^{b_i} \varphi''(y)(b_i - y) dy \right) / \\
 & \left( \varphi'(a_i)(c_i - a_i) + \int_{a_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy \right) = \frac{c_i - b_i}{c_i - a_i} \left[ 1 + \right. \\
 & + \left. \left( (b_i - a_i) \int_{a_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy - (c_i - a_i) \int_{a_i}^{b_i} \varphi''(y)(b_i - y) dy \right) / \right. \\
 & \left. \left( \varphi'(a_i)(c_i - a_i)(c_i - b_i) + (c_i - b_i) \int_{a_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy \right) \right] = \\
 & = z(i)(1 + A_i(z(i) - 1)),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_i = & - \left( \frac{1}{\varphi'(a_i)(b_i - a_i)} \int_{a_i}^{b_i} \varphi''(y)(y - a_i) dy + \frac{1}{\varphi'(a_i)(c_i - b_i)} \times \right. \\
 & \times \left. \int_{b_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy \right) / 1 + \frac{1}{\varphi'(a_i)(c_i - a_i)} \int_{a_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy.
 \end{aligned}$$

Из условия  $\varphi(x) \in C^{2+\nu}$  легко следует

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\varphi'(a_i)(b_i - a_i)} \int_{a_i}^{b_i} \varphi''(y)(y - a_i) dy - \int_{a_i}^{b_i} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy \right| & \leq \text{const} \cdot (b_i - a_i)^{1+\nu}, \\
 \left| \frac{1}{\varphi'(a_i)(c_i - b_i)} \int_{b_i}^{c_i} \varphi''(y)(c_i - y) dy - \int_{b_i}^{c_i} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy \right| & \leq \text{const} \cdot (c_i - a_i)^{1+\nu}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_i = - \int_{a_i}^{c_i} \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} dy + \eta_i, \quad |\eta_i| \leq \text{const} \cdot (c_i - a_i)^{1+\nu},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 5. Снова доказываем только первое утверждение леммы. Из леммы 4

$$\begin{aligned}\frac{1-z(i)}{z(i)} &= \frac{1-z(i-1)-(z(i-1)-1)A_{i-1}z(i-1)}{z(i-1)(1+A_{i-1}(z(i-1)-1))} = \\ &= \frac{1-z(i-1)}{z(i-1)} \cdot \frac{1+A_{i-1} \cdot z(i-1)}{1+A_{i-1}(z(i-1)-1)} = \frac{1-z(i-1)}{z(i-1)} (1+A_{i-1}+O(A_{i-1}^2)).\end{aligned}$$

Итерирование этого соотношения дает

$$\begin{aligned}\frac{1-z(i)}{z(i)} &= \frac{1-z(0)}{z(0)} \prod_{m=0}^{i-1} (1+A_m+O(A_m^2)) = \\ &= \frac{1-z(0)}{z(0)} \exp \left\{ \sum_{m=0}^{i-1} \ln(1+A_m+O(A_m^2)) \right\} = \\ &= \frac{1-z(0)}{z(0)} \exp \left\{ \sum_{m=0}^{i-1} A_m \right\} \cdot \exp \left\{ \sum_{m=0}^{i-1} O(A_m^2) \right\} = \\ &= \frac{1-z(0)}{z(0)} \cdot \frac{1}{M(i) \exp \{\tau^{(i)}(z(0))\}}, \quad (15)\end{aligned}$$

где  $\tau^{(i)}(z(0)) = - \sum_{m=0}^{i-1} (\eta_m + O(A_m^2))$  и

$$\begin{aligned}|\tau^{(i)}(z(0))| &\leq \text{const} \cdot \left( \sum_{m=1}^i (l(\Delta_m^{(n-1)}(x_0)))^{1+\nu} \right) \leq \\ &\leq \text{const} \cdot [\max l(\Delta_m^{(n-1)}(x_0))]^\nu \cdot \sum_{m=1}^i l(\Delta_m^{(n-1)}(x_0)) \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \left[ \max_{1 \leq m \leq q} l(\Delta_m^{(n-1)}(x_0)) \right]^\nu.\end{aligned}$$

Перепишем (15) следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(i)} - 1 &= \frac{1-z(0)}{z(0)M(i) \exp \{\tau^{(i)}(z(0))\}}; \\ z(i) &= \frac{z(0)M(i) \exp \{\tau^{(i)}(z(0))\}}{1+z(0)(M(i) \exp \{\tau^{(i)}(z(0))\}) - 1},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 6. Утверждение леммы 6

легко следует из неравенств  $M_n \leq \exp \left\{ \int_{S_1} \left| \frac{\varphi''(y)}{2\varphi'(y)} \right| dy \right\},$

$a_{n-1} \cdot a_n < 1$  и из неравенства леммы 5.

Доказательство леммы 7. Итерирование (12) дает

$$c_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \left( \prod_{j=i}^n \frac{a_j^2}{a_n \cdot a_i} \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{I(\Delta_1^{(n)}(x_0)) \cdot I(\Delta_1^{(n-1)}(x_0))}{I(\Delta_1^{(i)}(x_0)) \cdot I(\Delta_1^{(i-1)}(x_0))}.$$

Из леммы 2

$$\frac{I(\Delta_1^{(n)}(x_0)) \cdot I(\Delta_1^{(n-1)}(x_0))}{I(\Delta_1^{(i)}(x_0)) \cdot I(\Delta_1^{(i-1)}(x_0))} \leq \lambda^{2(n-i)}.$$

Кроме того,  $|\xi_i| \leq \text{const} \cdot \lambda^{iv}$ . Таким образом,

$$|c_n| \leq \text{const} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda^{iv} \cdot \lambda^{2(n-i)} \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 8. Неравенства  $a_n + b_n \leq \text{const}$ ,  $|\chi_n| \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv}$  и итерирование (13) дают

$$d_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \chi_i \prod_{j=i}^n a_j = (-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^i \chi_i \frac{I(\Delta_1^{(n)}(x_0))}{I(\Delta_1^{(i-1)}(x_0))},$$

что легко приводит к утверждению леммы.

Доказательство леммы 9. Поскольку  $x_0 \in S_1$  произвольно, достаточно оценить величину  $g'_{n+1}(0) = \frac{1-b_{n+1}}{a_{n+1}} M_{n+1} \exp\{\bar{\tau}_{n+1}(0)\}$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(0) &= \frac{1-b_{n+1}}{a_{n+1}} M_{n+1} \exp\{\bar{\tau}_{n+1}(0)\} = \\ &= \frac{d_{n+1} + a_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \exp\{\psi_{n+1} + \bar{\tau}_{n+1}(0)\} = \\ &= 1 + [\exp\{\psi_{n+1} + \bar{\tau}_{n+1}(0)\} - 1] + (\chi_{n+1} - d_n) \exp\{\psi_{n+1} + \bar{\tau}_{n+1}(0)\}. \end{aligned}$$

Используя (13) и неравенство леммы 8, получим

$$|g'_{n+1}(0) - 1| \leq \text{const} \cdot \lambda^{nv},$$

что приводит к утверждению леммы.

Тем самым доказательство теоремы Эрмана полностью закончено. Несколько уточняя приведенные рассуждения, можно показать, что  $\psi \in C^{1+v'}$  при любом  $v' < v$ . Если же  $k_n \leq \text{const}$ , то  $\psi \in C^{1+v}$ .

Технически более сложной является следующая теорема.

**Теорема 5.** Если  $\phi \in C^{r+v}$  при некотором  $r \geq 2$ , а  $k_n \leq \text{const} \cdot n^\gamma$ , то  $\psi \in C^{r-1+v}$  при любом  $v' < v$ . Если же  $k_n \leq \text{const}$ , то  $\psi \in C^{r-1+v}$ .

Теорема Эрмана не может быть справедливой для любых иррациональных чисел вращения. В. И. Арнольд построил пример числа вращения и аналитического диффеоморфизма  $S^1$  с этим числом вращения, приведение которого к повороту производится при помощи сингулярной функции  $\psi$ , т. е. такой, что  $\psi'$  почти всюду по мере Лебега равна нулю. Изложение этого примера можно найти в [1]. Первоначальное доказательство Эрмана см. в [2]. Несколько позднее Иоккос нашел более короткий путь доказательства теоремы Эрмана (см. [3]). Заметим, что авторы [2], [3] рассматривали диффеоморфизмы класса  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , но числа вращения удовлетворяли менее жестким условиям. В случае аналитических диффеоморфизмов метод Эрмана дает также аналитичность сопрягающего диффеоморфизма.

Станным и необъяснимым образом почти одновременно и независимо появились три работы [4], [5], [6], содержащие новый подход к доказательству теоремы Эрмана. Работа [5] тесно связана с [7]. Кацнельсон и Орнштейн в [4] получили наиболее сильный результат в данной области. А именно, они смогли показать, что если  $k_n \leq \text{const}$  и  $\varphi \in C^2(S^1)$ , то  $\psi$  абсолютно непрерывна.

Все работы [4], [5], [6], [7], [8] можно отнести к так называемому ренормгрупповому подходу в теории динамических систем (см. [9]). Достоинство изложенного в этой лекции подхода в том же русле идей связано с тем, что мы используем в главном порядке приближение наших отображений с помощью дробно-линейных функций (см. [8]). Это дало возможность написать нужные нам приближения с более высокой степенью точности. Кроме того, класс дробно-линейных функций замкнут относительно суперпозиций. Представление с помощью дробно-линейных функций может быть выписано также для некоторых классов отображений с особенностями (Ханин).

Метод ренормгруппы является основным средством при изучении приводимости семейства отображений  $\varphi_\rho(x) =$

$$= x + \rho + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x. \text{ Особенность этого случая состоит в том,}$$

что  $\varphi'_\rho(1/2) = 0$ , т. е.  $\varphi$  является диффеоморфизмом всюду, кроме  $1/2$ . Оказывается, что это приводит к существенному усложнению задачи о приводимости к повороту. Здесь возникают новые интересные эффекты, но мы не будем на этом останавливаться, тем более что математических результатов пока здесь не так уж много (Эккман, Лэнфорд, Виттвер и др.). Недавно появилась интересная работа Свентека [10], где показано, что лебегова мера множества тех значений параметра  $\rho$ , где число вращения иррационально, равна нулю.

## ССЫЛКИ

- [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
- [2] Herman M. Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations // Publ. Math. IHES—1979.— V. 49.— P. 5—233.
- [3] Yoccoz J. C. Conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle dont le nombre de rotation verifie une condition diophantienne // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser. 4.—1984. V. 17.— P. 333—359.
- [4] Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle.— Ergodic Theory and Dyn. Systems.—1989.— V. 9, № 4.— P. 643—680.
- [5] Stark J. Smooth conjugacy and renormalization for diffeomorphisms of the circle // Nonlinearity.—1988.— V. 1.— P. 541—575.
- [6] Khanin K. M., Sinai Ya. G. A new proof of M. Herman's theorem // Comm. Math. Phys.—1987.— V. 112.— P. 89—101.
- [7] Rand D. Global phase-space universality, smooth conjugations and renormalization.  $C^{1+\alpha}$  case // Nonlinearity.—1988.— V. 1.— P. 181—202.
- [8] Синай Я. Г., Ханин К. М. Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами // УМН.—1989.— Т. 44, № 1.— С. 57—82.
- [9] Синай Я. Г., Ханин К. М. Метод ренормализационной группы в теории динамических систем // Совещание «Ренормгруппа-86». — Дубна: ОИЯИ, 1987.
- [10] Swiatek G. Rational Rotation Numbers for Maps of the Circle // Comm. Math. Phys.—1988.— V. 119, N 2.— P. 109—128.

## ЛЕКЦИЯ 11

### ПОРЯДОК ШАРКОВСКОГО И УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ФЕЙГЕНБАУМА

Около двадцати лет назад у меня было общее ощущение, что структура одномерных динамических систем относительно проста и может быть понята до конца, и в то же время результаты, справедливые для одномерного случая, не имеют естественных многомерных аналогов. Последующие годы показали, что оба этих ощущения неправильны. Во-первых, здесь были обнаружены новые удивительные и неожиданные закономерности, и, во-вторых, некоторые из них естественно переносятся на случай любого числа измерений. В этой лекции пойдет речь о двух замечательных открытиях в одномерной динамике, показывающих глубину и красоту всей теории.

Начнем с так называемого порядка Шарковского. Пусть  $f$  — непрерывная функция на отрезке  $\bar{I}$ , причем  $f(x) \in \bar{I}$  для любого  $x \in \bar{I}$ . Тогда мы получаем непрерывное отображение  $T_f$  отрезка  $\bar{I}$ , где  $T_f(x) = f(x)$ . Точка  $x$  называется периодической точкой периода  $n$ , если  $T_f^n x = x$  и  $T_f^p x \neq x$  для всех  $p$ ,  $1 \leq p < n$ . Порядок Шарковского связан с сосуществованием периодических точек различных периодов.

**Определение 1.** Порядком Шарковского называется упорядочение в множестве целых положительных чисел, имеющее вид

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots$$

$$\dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

**Теорема Шарковского.** Если  $T$  имеет периодическую точку периода  $n$ , то оно имеет периодические точки всех периодов  $k \triangleright n$  в смысле порядка Шарковского.

**Следствие.** Если  $\varphi$  имеет периодическую точку периода 3, то оно имеет периодические точки всех периодов.

**Доказательство.** Мы можем считать, что  $n$ , для которого существует периодическая точка периода  $n$ , минимально в порядке Шарковского.

Пусть  $I'$ ,  $I''$  — два интервала. Мы скажем, что  $I'$  *φ-накрывает*  $I''$ , если  $\varphi(I') \supseteq I''$ . В таком случае найдется подынтервал  $K \subset I'$ , для которого  $\varphi(K) = I''$  и  $\varphi(\partial K) = \partial I''$ . Мы будем называть  $K$  *h-интервалом*, если не существует  $K' \subset K$  с теми же свойствами. Мы скажем, что  $I'$  *φ-накрывает*  $I''$   $n$  раз, если существует  $n$  попарно непересекающихся  $h$ -интервалов  $K_1, \dots, K_n$ ,  $K_j \subset I'$ , таких, что  $\varphi(K_j) = I''$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Допустим, что  $I_1, I_2, \dots, I_s$  есть конечное множество непесекающихся интервалов. *А-графом* мы будем называть ориентированный граф, вершинами которого служат интервалы  $I_1, I_2, \dots, I_s$ , а число стрелок из  $I_i$  в  $I_j$  равно числу  $h$ -интервалов  $I_{ik} \subset I_i$ , для которых  $\varphi(I_{ik}) = I_j$ . Основное свойство *А-графов*, которое мы используем, формулируется в следующей лемме.

**Лемма 1.** Предположим, что  $I_{i_1} \rightarrow I_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow I_{i_r} \rightarrow I_{i_1}$  есть замкнутый путь в *А-графе*. Тогда существует точка  $x_0 \in I_{i_1}$  такая, что  $T_\varphi^s x_0 \in I_{i_s}$ ,  $1 \leq s \leq r$ . Более того, в качестве  $x_0$  можно взять периодическую точку периода  $r$ .

Утверждение легко следует из того, что  $T_\varphi$  определяет непрерывное отображение  $h$ -интервала  $I'_{r_1} \subset I_{i_1}$  на  $I_{i_1}$ .

Теперь мы сформулируем две основные леммы, из которых выведем теорему Шарковского. Доказательства лемм будут приведены позже.

**Лемма 2.** Предположим, что  $T_\varphi$  имеет периодическую точку  $x$  нечетного периода  $n > 1$  и не имеет других периодических точек нечетных периодов, меньших  $n$  и больших 1. Пусть  $A$  — разбиение отрезка  $J = [\min \text{Orb } x, \max \text{Orb } x]$  точками траектории  $\text{Orb } x = \bigcup_{0 \leq i \leq n} T_\varphi^i x$ . Тогда существует *А-подграф*

следующего вида:

$$0 \leq i \leq n$$



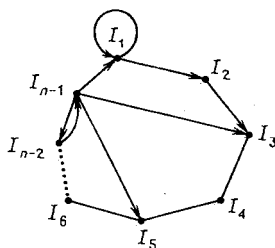


Рис. 11.1

Утверждение леммы означает для каждой стрелки существование  $h$ -интервала, который отображается взаимно-однозначно на свой образ, и его нельзя уменьшить с сохранением этого свойства.

**Лемма 3.** Если  $T_\phi$  имеет периодическую точку четного периода, то оно имеет периодическую точку периода 2.

Для доказательства теоремы Шарковского рассмотрим четыре случая.

1°  $n = 2^m$ ,  $k = 2^l$ ,  $0 < l < m$ . Возьмем  $\psi = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{2^{l-1}}$ . Если  $x$  есть

периодическая точка периода  $2^m$  для  $T_\phi$ , то  $x$  есть периодическая точка периода  $2^{m-l+1}$  для  $T_\psi$ . Тогда на основании леммы 3  $T_\psi$  имеет периодическую точку  $y$  периода 2, т. е.  $T_\psi y = T_\phi^{2^{l-1}} y \neq y$ ,  $T_\psi^2 y = T_\phi^{2^l} y = T_\phi^k y = y$ . Покажем, что  $y$  есть периодическая точка периода  $k$  для  $\phi$ . В самом деле, если  $T_\phi^{k_1} y = y$  для некоторого  $k_1 < k$ , то тогда  $k_1 = 2^{l_1}$ ,  $l_1 = l$ , и мы приходим к противоречию с тем, что  $T_\phi^{2^{l-1}} y = T_\phi^{k_1 \cdot 2^{l-1-l_1}} y \neq y$ .

2°  $n = p \cdot 2^m$ ,  $p$  нечетно,  $p > 1$ ;  $k = q \cdot 2^m$ ,  $q$  четно. Используем лемму 2 для  $T_\psi$ ,  $\psi = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{2^m}$ . Предположения леммы выпол-

нены, поскольку  $n$  минимально. Тогда существует замкнутый путь

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{p-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1, \text{ если } q > p,$$

или замкнутый путь

$$I_{p-1} \rightarrow I_{p-1-q} \rightarrow I_{p-q} \rightarrow I_{p-q+1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{p-1},$$

если  $q < p$ .

На основании леммы 1 существует точка  $y_0 \in I_1$  в первом случае или точка  $y_0 \in I_{p-1}$  во втором случае, для которых

$$y_i = T_\psi^i y_0 = T_\phi^{i \cdot 2^m} y_0 \in I_{i+1}, \quad 1 \leq i < p-1,$$

$$y_i = T_\phi^{i \cdot 2^m} y_0 \in I_1, \quad p-1 \leq i < q,$$

в первом случае и

$$y_0 \in I_{p-1}, \quad T_\Phi^{i \cdot 2^m} y_0 \in I_{p-2-q+i}, \quad i=1, \dots, q,$$

во втором случае. В обоих случаях все  $y_i$ ,  $0 \leq i < q$ , различны,  $y_q = y_0$ . Остается только показать, что период точки  $y$  не может быть меньше  $q \cdot 2^m$ .

Напишем  $q = q_1 \cdot 2^{l_1}$ , где  $q_1$  нечетно, и допустим, что период  $y$  равен  $\tilde{k} = \tilde{q}_1 \cdot 2^{l_1}$ , где  $\tilde{q}_1$  есть делитель  $q$ , и  $\tilde{l}_1 \leq l_1 + m$ . Если  $\tilde{l}_1 < l_1 + m$ , то тогда для  $i = q/2$  мы будем иметь  $i \cdot 2^m = q/2 \cdot 2^m = q_1 \cdot 2^{l_1+m-1} = \tilde{k} \cdot r$ , где  $r$  — целое число. Таким образом,  $y_i = T_\Phi^{i \cdot 2^m} y = T_\Phi^{\tilde{k} \cdot r} y = y$ , что противоречит тому, что все  $y_i$  различны. Если  $\tilde{l}_1 = l_1 + m$  и  $\tilde{q}_1 < q_1$ , то мы возьмем  $i = \tilde{q}_1 \cdot 2^{l_1} < q_1$ . Тогда  $i \cdot 2^m = \tilde{q}_1 \cdot 2^{m+l_1} = \tilde{k}$  и  $y_i = T_\Phi^{\tilde{k}} y = y$  опять ведет к противоречию. Тем самым период  $y$  равен  $q \cdot 2^m$ .

3°  $n = p \cdot 2^m$ ,  $p$  нечетно и  $p > 1$ ;  $k = q \cdot 2^m$ ,  $q$  нечетно и  $q > p$ . Снова берем  $\psi = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{2^n}$  и используем лемму 2 для получения

замкнутого пути  $\underbrace{I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{p-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{q \text{ раз}}$ . Тогда опять

получаем точку  $y_0 \in I_1$ , для которой для  $y_i = T_\Phi^{i \cdot 2^m} y_0$  имеем  $y_i \in I_{i+1}$ ,  $1 \leq i < p-1$ , и  $y_i \in I_1$  для всех  $i$ ,  $p-1 \leq i \leq q$ . Кроме того,  $y_q = y_0$ , в то время как все остальные  $y_i$  различны.

Покажем, что период  $y_0$  равен  $q \cdot 2^m$ . Если период  $y_0$  равен  $\tilde{q} \cdot 2^m$ , где  $\tilde{q} > 1$  есть делитель  $q$ , то тогда для  $i = \tilde{q} < q$  мы должны были бы иметь  $y_i = y_0$ , что невозможно. Если же период  $y_0$  равен  $\tilde{k} = q \cdot 2^{\tilde{m}}$  при  $\tilde{m} < m$ , то тогда  $k < n$ , и мы приходим к противоречию с минимальностью  $n$ .

4°  $n = 2^m p$ ,  $p$  нечетно,  $k = 2^l$  для некоторого  $l \leq m$ . В этом случае мы вначале используем 2° для получения периодической точки периода  $2^{m+1}$ , а затем используем 1° для получения периодической точки периода  $k$ . Заметим, что в 1° мы не использовали минимальности  $n$ .

Теорема Шарковского полностью доказана. Осталось доказать леммы 2 и 3.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим траекторию  $\text{Orb}(x) = \{T_\Phi^m x, 0 \leq m < n\}$  точки  $x$ . Разбиением  $A$  будем называть разбиение отрезка  $J = [\min \text{Orb } x, \max \text{Orb } x]$ ,

производимое точками  $\text{Orb } x$ . Ясно, что  $T_\Phi \left( \max_{0 \leq m < n} T_\Phi^m x \right) < \max_{0 \leq m < n} T_\Phi^m x$ . Поэтому существует элемент  $I_1 = [a, b]$  разбиения

$A$ , для которого  $\varphi(a) > a$  и  $a$  — наибольшая среди точек  $T_\Phi^m x$ ,  $0 \leq m < n$ , обладающих этим свойством. Для  $I_1$  мы имеем  $\varphi(a) \geq b$ ,  $\varphi(b) \leq a$  и, следовательно,  $T_\Phi(I_1) \supset I_1$ . Поэтому

последовательность  $T_\Phi^k I_1$  возрастающая, и тем самым  $T_\Phi^n(I_1) \supseteq J$ . Поскольку  $n$  нечетно, то с одной стороны от  $I_1$  находится больше точек  $\text{Ogb } x$ , чем с другой стороны. Поэтому некоторые из них под действием  $T_\Phi$  должны остаться с той же стороны  $I_1$ , а некоторые должны перейти на другую сторону. Следовательно,  $I_1 \subset T_\Phi K$  для некоторого элемента  $K = I_s$  разбиения  $A$ , причем  $T_\Phi^k(I_s) \supset I_s$ , и  $k \leq n-1$ . Последнее, в свою очередь, означает, что в интервале  $I_1$  найдется подынтервал  $K'$  такой, что  $T_\Phi^k(K') = I_s$ , концы  $K'$  переходят в концы  $I_s$ , и  $K'$  нельзя уменьшить с сохранением этих свойств. Значит, интервалы  $T^i(K')$ ,  $i < k$ , не содержат внутри себя точек из  $\text{Ogb}(x)$ , и, значит,  $T^i(K') \subset I_i$  для некоторого интервала на  $I_i$  разбиения  $A$ , и мы получаем подграф вида

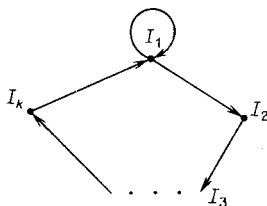


Рис. 11.2

Мы можем предположить, что замкнутый путь  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$  является кратчайшим (за исключением  $I_1$ ), ведущим из  $I_1$  в  $I_1$ .

Если  $k < n-1$ , то либо замкнутый путь  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ , либо замкнутый путь  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$  дают нам по лемме 1 неподвижную точку  $T_\Phi^m$ , где  $1 < m < n$  и  $m$  нечетно. Эта точка не может быть неподвижной точкой, и мы приходим к противоречию с нашим предположением. Таким образом,  $k = n-1$ .

Если  $k = n-1$ , то каждый элемент  $A$  входит в наш подграф. При этом не существует стрелок, ведущих из  $I_i$  в  $I_j$  для  $j > i+1$ , поскольку мы выбрали кратчайший путь. Кроме того,  $T_\Phi^{n+1} I_1$  отличается от  $T_\Phi^n I_1$  в точности одним интервалом  $I_{n+1}$ .

Покажем теперь, что элементы  $A$  идут на прямой в следующем порядке:  $I_{n-1}, I_{n-3}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{n-4}, I_{n-2}$  с точностью до ориентации. Если  $n=3$ , то мы имеем только два интервала  $I_1, I_2$ , и здесь утверждение очевидно. Поэтому предположим, что  $n > 3$ . Вначале рассмотрим  $I_1$ . Тогда  $\varphi(a) \geq b$ ,  $\varphi(b) \leq a$ . Оба равенства одновременно не могут выполняться, поскольку в этом случае  $a$  будет либо неподвижной точкой, либо периодической точкой периода 2, но одно из них обязательно выполняется. Пусть для определенности  $\varphi(a) = b$ ,  $\varphi(b) = a_2 < a$  и  $(a_2, a) = I_2$ . Если  $\varphi(a_2)$  лежит слева от  $a_2$ , то тогда

$\varphi(I_2) \supset I_1$ , и мы имеем подграф,



Рис. 11.3

из которого на основании леммы 1 вытекает существование периодической точки периода 2. Таким образом,  $\varphi(a_2)$  лежит справа от  $b$  и  $\varphi(I_2) = I_3$  есть интервал, примыкающий к  $I_1$  с другой стороны, чем  $I_2$ .

Общий случай рассматривается по индукции. Если мы уже построили  $I_k, I_{k-2}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{k+1}$  и  $I_k = (a_k, a_{k-2})$ ,  $I_{k+1} = (a_{k-1}, a_{k+1})$ ,  $a_{k+1} = \varphi(a_k)$ ,  $a_{k-1} = \varphi(a_{k-2})$ , то тогда точка  $a_{k-1}$ , которая служит концом  $I_{k+1}$ , отображается в конец  $I_k$ . Если же  $\varphi(a_{k+1})$  лежит справа от  $a_{k+1}$ , то тогда мы опять смогли бы построить периодические точки меньших периодов. Тем самым  $\varphi(a_k)$  лежит с той же стороны от  $a$ , что и  $a_k$ , т. е.  $I_{k+2} = T_\varphi(I_{k+1})$  примыкает к  $I_k$  и т. д.

Общий конец  $I_{n-3}$  и  $I_{n-1}$  отображается на общий конец  $I_{n-2}$  и  $I_1$ , что дает  $T_\varphi(I_{n-1}) \supset I_1$ . Тем самым имеются стрелки, идущие из  $I_{n-1}$  в вершины с нечетными индексами. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Мы использовали нечетность  $n$  в доказательстве леммы 2 только один раз. А именно, из нечетности  $n$  мы вывели  $I_1 \subset \varphi(K)$  для некоторого другого элемента  $K$  графа  $A$ .

Поэтому если мы обозначим через  $k$  наименьший четный период периодических точек  $T_\varphi$  и если  $n > 2$ , то тогда либо  $A$ -граф содержит подграф

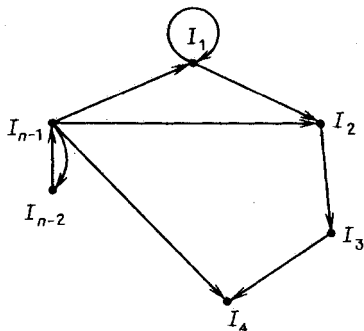


Рис. 11.4

(здесь  $n-1$  нечетно, и поэтому есть стрелки, ведущие из  $I_{n-1}$  в четные вершины), либо не существует  $K \in A$  такого, что  $\varphi(K) \supset I_1$ .

В первом случае замкнутый путь  $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$  дает нам по лемме 1 периодическую точку периода 2. Во втором случае  $\{\min \text{Orb } x, \min I_1\}$   $\varphi$ -накрывает  $\{\max I_1, \max \text{Orb } x\}$ , и обратно. Таким образом, на основании леммы 1 мы имеем периодическую точку периода 2. Лемма 3 доказана.

Тем самым доказательство теоремы Шарковского полностью завершено. Мы переходим теперь ко второй части этой лекции, посвященной знаменитой универсальности Фейгенбаума для бифуркаций удвоения периода.

Рассмотрим однопараметрические семейства отображений одного и того же отрезка  $I$  в себя, определяемые семейством гладких функций  $\varphi(x; \lambda)$ . Типичным примером служит  $\varphi(x; \lambda) = \lambda x(1-x)$ , где  $\varphi(x; \lambda) \in I = [0, 1]$  при  $x \in [0, 1]$  и  $0 \leq \lambda \leq 4$ . Отображение, отвечающее  $\varphi(x; \lambda)$ , будем обозначать  $T_\lambda$ . Предположим, что при  $\lambda = \lambda_0$  отображение  $T_{\lambda_0}$  имеет устойчивую неподвижную точку  $x_{\lambda_0}$ , в которой

$$\left| \frac{d}{dx} \varphi(x_{\lambda_0}; \lambda_0) \right| < 1.$$

Тогда в некоторой окрестности  $\lambda_0$  все отображения  $T_\lambda$  имеют устойчивую неподвижную точку  $x_\lambda$ . Допустим, что при увеличении параметра  $\lambda$  точка  $x_\lambda$  становится все менее устойчивой и при  $\lambda = \lambda_1$  вообще теряет устойчивость. В ситуации общего положения это может происходить двумя способами: либо  $\varphi'(x_{\lambda_1}; \lambda_1) = 1$ , либо  $\varphi'(x_{\lambda_1}; \lambda_1) = -1$ . Нас особенно интересует последний случай. Дело в том, что в ситуации общего положения при  $\lambda = \lambda_1$  происходит бифуркация удвоения периода, проявляющаяся в том, что при  $\lambda > \lambda_1$  неподвижная точка  $x_{\lambda_1}$ , которая раньше была устойчивой, теперь уже становится неустойчивой. Одновременно с этим возникает периодическая траектория периода 2, которая будет устойчивой. Характер этой бифуркации виден на рис. 11.5, на котором изображены графики функций  $\varphi(x; \lambda)$ ,  $\varphi^{(2)}(x; \lambda) = \varphi(\varphi(x; \lambda); \lambda)$  в окрестности  $\lambda = \lambda_1$ . Обозначим точки, лежащие на устойчивой периодической траектории периода 2, через  $x_{\lambda_1}^{(1)}$ ,  $x_{\lambda_1}^{(2)}$ . Будем следить теперь за поведением  $\varphi^{(2)}(x; \lambda)$  в окрестности точки  $x_{\lambda_1}^{(1)}$ . При  $\lambda = \lambda_1$  производная

$$\left. \frac{d^2 \varphi^{(2)}(x; \lambda_1)}{dx^2} \right|_{x=x_{\lambda_1}^{(1)}} = 1,$$

а при  $\lambda > \lambda_1$  эта производная уменьшается. Пусть это

уменьшение происходит монотонно \*) и при  $\lambda = \lambda_2$  производная  $\frac{d^2\varphi^{(2)}(x; \lambda_2)}{dx^2} \Big|_{x=x_{\lambda_2}^{(1)}} = -1$ . Тогда в точности таким же образом, как и раньше, точка  $x_{\lambda_2}^{(1)}$  теряет устойчивость и становится

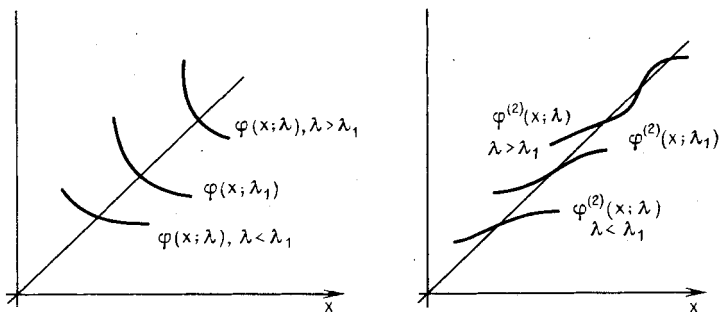


Рис. 11.5

неустойчивой, а в ее окрестности образуется устойчивая периодическая траектория периода 2 для  $T_{\lambda_2}^2$ , т. е. устойчивая периодическая траектория периода 4 для  $T_{\lambda_2}^4$ . В окрестности этой траектории остаются неустойчивые периодические траектории периодов 2 и 1. В порядке Шарковского это соответствует его правому краю.

Предположим теперь, что при увеличении  $\lambda$  возникает последовательность значений параметра  $\lambda_k$ , при которых происходят последовательные бифуркации удвоения периода таким образом, что при  $\lambda > \lambda_k$  и близком к  $\lambda_k$  имеется устойчивая периодическая траектория периода  $2^k$  для отображения  $T_\lambda$ , в окрестности которой имеются неустойчивые периодические траектории периодов  $2^{k-1}$ ,  $2^{k-2}$ , ..., 2, 1. Роль этих траекторий состоит в том, что они как бы «выталкивают» все остальные траектории на эту устойчивую периодическую траекторию. Обозначим  $\lambda_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k$ . Уни-

версальность Фейгенбаума состоит в том, что  $\lambda_k$  сходятся к пределу с универсальной скоростью, не зависящей от рассматриваемого семейства функций  $\varphi(x; \lambda)$ , в том смысле, что  $\lambda_k - \lambda_\infty \sim C(\varphi)\delta^{-k}$ , где  $\delta$  — знаменитая постоянная Фейгенбаума,  $\delta = 4,6692...$ , а  $C(\varphi)$  — постоянная, зависящая от семейства.

\*) Это допущение делается только для простоты и не влияет на построение теории.

При  $\lambda = \lambda_\infty$  мы имеем отображение, имеющее неустойчивые периодические траектории всех периодов  $2^k$ , и инвариантное множество  $A$ , притягивающее к себе большинство траекторий, начинающихся в его окрестности. Пример такого отображения описан в лекции 4.

Универсальность Фейгенбаума имеет очень широкую область применения. Она выполняется для однопараметрических семейств многомерных отображений, для семейств векторных полей. Имеется много конкретных физических экспериментов, где в результате измерений получаются данные, находящиеся в прекрасном согласии с универсальностью Фейгенбаума. Существенно также, что часто  $\lambda_\infty$  может рассматриваться как момент появления динамики с сильными статистическими свойствами. Более точно, при  $\lambda < \lambda_\infty$  образы мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега, под действием динамики сходятся к мерам, сосредоточенным на устойчивых периодических траекториях. Наоборот, при  $\lambda > \lambda_\infty$  имеются значения параметра, сколь угодно близкие к  $\lambda_\infty$ , при которых образы таких мер сходятся к нетривиальным пределам, по отношению к которым преобразование эргодично, имеет положительную энтропию и т. п. Подчеркнем, впрочем, что эти вопросы исследованы пока недостаточно.

Объяснение универсальности Фейгенбаума дается с помощью уже упоминавшегося метода ренормгруппы. Пример действия этого метода мы уже видели в предыдущей лекции. Выше мы предположили, что при изменении  $\lambda$  от  $\lambda_k$  до  $\lambda_{k+1}$  производная  $\left. \frac{d}{dx} \varphi^{(2^k)}(x, \lambda) \right|_{x=x_{\lambda_k}^{(1)}}$  монотонно убывает от 1 до  $-1$ . Здесь  $x_{\lambda_k}^{(1)}$  есть одна из точек периодической траектории периода  $2^k$ . Поэтому найдется такое  $\bar{\lambda}_k$ ,  $\lambda_k < \bar{\lambda}_k < \lambda_{k+1}$ , что  $\left. \frac{d}{dx} \varphi^{(2^k)}(x, \bar{\lambda}_k) \right|_{x=x_{\bar{\lambda}_k}^{(1)}} = 0$ . Основная идея Фейгенбаума состоит в том, что  $\varphi^{(2^{k-1})}(x; \bar{\lambda}_{k-1})$  в окрестности  $x = x_{\bar{\lambda}_{k-1}}^{(1)}$  выглядит асимптотически так же, как  $\varphi^{(2^k)}(x; \bar{\lambda}_k)$  в окрестности  $x = x_{\bar{\lambda}_k}^{(1)}$  с точностью до масштабного преобразования. Если эта гипотеза верна, то можно убедиться в том, что форма такой универсальной функции  $\psi$  должна удовлетворять функциональному уравнению (см. лекцию 4)

$$\psi(x) = -\alpha \psi(\alpha^{-1}x), \quad \alpha = -\frac{1}{\psi(1)}, \quad (1)$$

и условиям

$$\begin{aligned} 1) \quad & \psi(-x) = \psi(x); \\ 2) \quad & \psi(0) = 1. \end{aligned}$$

Первые математические результаты, относящиеся к доказательству существования решения этого уравнения, были получены Колле, Экманном и Лэнфордом (см. 3°). В дальнейшем более простые доказательства были найдены Кампанино, Эпштейном и др. (см. 3°). Следует, впрочем, подчеркнуть, что в большинстве этих работ в большей или меньшей степени используются результаты машинного счета. Недавно Д. Сулливан показал, что в классе функций, удовлетворяющих определенным условиям аналитичности, решение этого уравнения единственно.

Обозначим найденное решение через  $\psi_0(x)$ . В лекции 4 мы исследовали некоторые свойства динамики  $T_{\psi_0}$ . Уравнение (1) можно записать в виде

$$\psi_0 = D(\psi_0),$$

где  $D$  — нелинейный оператор, стоящий в правой части (1). Этот оператор можно линеаризовать в окрестности точки  $\psi_0$ . Это означает, что для  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  можно написать

$$D(\psi + \psi_1) = \psi_0 + L\psi_1 + \dots,$$

где многоточие означает малые высшего порядка малости по сравнению с  $\psi_1$ . Здесь  $L$  — линейный оператор, называемый линеаризацией  $D$ . Он несамосопряженный и имеет довольно сложный вид. Тем не менее можно ставить вопрос о его спектре. Оказывается, что  $L$  имеет один собственный вектор  $e_0$ , которому отвечает собственное значение  $\delta > 1$ ,  $\delta$  — та же самая постоянная Фейгенбаума, и инвариантное подпространство  $H_0$ , в котором норма  $L$  меньше единицы.

Мы используем сейчас эту информацию для объяснения универсальности Фейгенбаума. Разумеется, приводимые ниже рассуждения нельзя рассматривать как строгое математическое доказательство. Поскольку спектр  $L$  имеет описанную структуру, через точку  $\psi_0$  в окрестности этой точки в функциональном пространстве функций  $\psi$  можно провести одномерную кривую  $\Gamma^{(u)}(\psi_0)$  (см. рис. 11.6), называемую неустойчивым многообразием этой точки. Она однозначно определяется тем, что  $D(\Gamma^{(u)}(\psi_0)) \supset \Gamma^{(u)}(\psi_0)$ , и в точке  $\psi_0$  касается вектора  $e_0$ . Кроме того, в окрестности  $\psi_0$  через  $\psi_0$  можно провести так называемое устойчивое подмногообразие  $\Gamma^{(s)}(\psi_0)$  коразмерности 1, определяемое тем, что 1)  $D(\Gamma^{(s)}(\psi_0)) \subset \Gamma^{(s)}(\psi_0)$ , 2)  $D^n \psi \rightarrow \psi_0$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $\psi \in \Gamma^{(s)}(\psi_0)$ , 3)  $\Gamma^{(s)}(\psi_0)$  касается  $H_0$  в точке  $\psi_0$ .

Рассмотрим теперь в том же функциональном пространстве подмногообразие  $\bar{\Gamma}$  коразмерности 1, состоящее из тех  $\psi$ , у которых производная в неподвижной точке равна  $-1$ .



Предполагается, что  $\bar{\Gamma}$  близко к  $\Gamma^{(s)}(\lambda_0)$  и пересекает  $\Gamma^{(u)}(\psi_0)$  в некоторой точке  $\bar{\psi} \in \Gamma^{(u)}(\psi_0)$ . В малой окрестности  $\psi_0$  определено обратное отображение  $D^{-1}$ . Нетрудно понять, что  $D^{-n}\bar{\Gamma}$  отвечает отображениям  $T_\psi$ , у которых есть

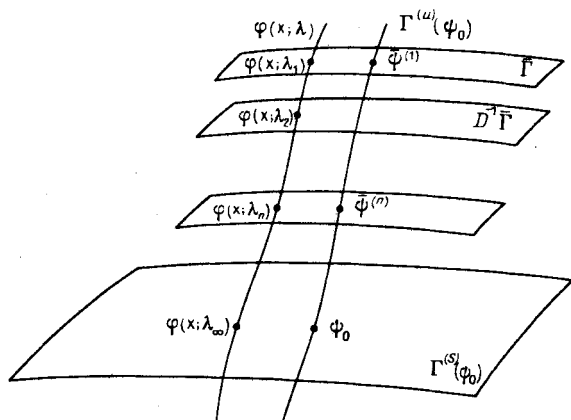


Рис. 11.6

периодическая траектория периода  $2^n$ , в которой производная  $\frac{d}{dx}T_\psi^{2^n}$  равна  $-1$ , т. е. происходит  $n$ -я бифуркация удвоения периода. Точки пересечения  $D^{-n}\bar{\Gamma}$  с  $\Gamma^{(u)}(\psi_0)$  обозначим  $\bar{\psi}^{(n)}$ ,  $\bar{\psi}^{(1)} = \bar{\psi}$ . Если на  $\Gamma^{(u)}(\psi_0)$  выбрать какой-либо естественный параметр  $\lambda$ , то точкам  $\bar{\psi}^{(n)}$  отвечает последовательность  $\bar{\lambda}^{(n)}$ . Из свойств  $L$  легко теперь следует, что  $\bar{\lambda}^{(n+1)}/\bar{\lambda}^{(n)} \rightarrow \delta^{-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Допустим теперь, что мы имеем семейство функций  $\{\varphi(x; \lambda)\}$ , близкое в определенном смысле к  $\Gamma^{(u)}(\psi_0)$ . С точки зрения геометрии функционального пространства  $\{\varphi(x; \lambda)\}$  представляет собой кривую в этом пространстве. Значение  $\lambda_\infty$  отвечает точке пересечения этой кривой с  $\Gamma^{(s)}(\psi_0)$ , а значения параметра  $\lambda_k$ , где происходят последовательные бифуркации удвоения периода, отвечают точкам пересечения кривой  $\{\varphi_k\}$  с  $D^{-k}T$ . Но поскольку  $D^{-k}\bar{\Gamma}$  приближаются к  $\Gamma^{(s)}(\psi_0)$  с экспоненциальной скоростью  $\delta^{-k}$ , то этим же свойством обладает скорость сближения  $\lambda_k$  с  $\lambda_\infty$ . Это и выражает универсальность Фейгенбаума.

Заметим, что возможны и другие универсальности помимо универсальности Фейгенбаума в однопараметрических

семействах одномерных отображений. Однако универсальность Фейгенбаума, по-видимому, единственная универсальность, отвечающая цепочке последовательных бифуркаций.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Теорема Шарковского впервые появилась в его статье

[1] Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. матем. журнал.—1964.—Т. 16.—С. 61—71;

[2] О циклах и структуре непрерывного отображения // Укр. матем. журнал.—1965.—Т. 17.—С. 104—111.

Эта теорема приобрела большую популярность после статьи

[3] Li T. Y., Yorke J. A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly.—1975.—V. 82.—P. 985—992.

Наше изложение представляет собой обработку доказательства, приведенного в статье

[4] Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L. S. Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps // Lecture Notes in Math.—1980.—V. 819.—P. 18—34.

2° Универсальность Фейгенбаума впервые появилась в работах

[5] Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of non-linear transformations // J. of Stat. Phys.—1978.—V. 19. P. 25—52.

[6] The universal metric properties of non-linear transformations // J. of Stat. Phys.—1979.—V. 21.—P. 669—706.

Функциональное уравнение (1) появилось также в работах

[7] Derrida B., Gervois A., Pomeau Y. Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms // J. Phys.—1979.—V. 12.—P. 269—296.

[7"] Collet P., Tresser C. Itérations d'endomorphisms et groupe de renormalization // C. R. Acad. Sci. Paris.—1979.—V. 287.—Ser. A—B.—P. A577—A580.

3° В настоящее время имеется много математических работ, посвященных универсальности Фейгенбаума. Мы упомянем только некоторые из них.

[8] Collet P., Eckmann J. P., Lanford III O. E. Universal properties of maps of an interval // Comm. Math. Phys.—1980.—V. 76.—P. 211—254.

[9] Lanford III O. E. A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures // Bull. Amer. Math. Soc.—1982.—V. 6.—P. 427—434.

[10] Campanino M., Epstein H. On the existence of Feigenbaum's fixed point // Comm. Math. Phys.—1981.—V. 79.—P. 261—302.

[11] Epstein H., Lascoux J. Analyticity properties of Feigenbaum function // Comm. Math. Phys.—1981.—V. 81.—P. 437—453.

4° Неустойчивое многообразие  $\Gamma^{(2)}(\psi_0)$  было построено численно в статье

[12] Вул Е. Б., Ханин К. М. О неустойчивой сепаратрисе неподвижной точки Фейгенбаума // УМН.—1982.—Т. 37, № 5.—С. 173—174.

Универсальность Фейгенбаума посвящена обзорная статья

[13] Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН.—1984.—Т. 39, № 3.—С. 3—37.

5° Общей теории одномерных динамических систем посвящены следующие книги:

[14] Collet P., Eckmann J. P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.—Birkhauser, 1980.—248 p.

[15] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения.—Киев: Наукова Думка, 1986.—276 с.

[16] de Melo W. One-dimensional Dynamics.—Springer-Verlag (in press).

## ЛЕКЦИЯ 12

### РАСТЯГИВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

В этой лекции мы рассмотрим простейший класс отображений с сильными статистическими свойствами. Уже на этом примере можно увидеть механизм, показывающий, как может динамика создавать инвариантную меру, определяющую статистику типичных траекторий. Этот механизм, как будет видно в части V, действует и в гораздо более общей ситуации.

Предположим, что  $\varphi$  есть функция на  $\mathbb{R}^1$ , обладающая следующими свойствами:

- a<sub>1</sub>)  $\varphi \in C^{1+\gamma}$  при некотором  $\gamma > 0$ ;
- a<sub>2</sub>)  $\varphi'(x) \geq \lambda_0 > 1$ ;
- a<sub>3</sub>)  $\varphi(x+1) = \varphi(x) + r$  при некотором целом  $r$ ;
- a<sub>4</sub>)  $\varphi(0) = 0$ .

Как и в лекции 10, определим отображение  $T_\varphi$  единичной окружности  $S^1$  на себя посредством формулы  $T_\varphi(x) = \{\varphi(x)\}$ ,  $x \in [0, 1)$ ;  $\{\cdot\}$ , как всегда, дробная часть. Условие a<sub>4</sub>) может при этом рассматриваться как способ выбора начала координат на  $S^1$ . Из a<sub>2</sub>) и a<sub>3</sub>) следует, что каждая точка  $x$  имеет  $r$  прообразов. Таким образом,  $T_\varphi$  есть эндоморфизм  $S^1$ . Свойство a<sub>2</sub>) показывает, что локально  $T_\varphi$  равномерно увеличивает расстояние между близкими точками по крайней мере в  $\lambda_0$  раз. По этой причине отображение  $T_\varphi$  называется растягивающим.

Основная теорема для растягивающих отображений. Пусть  $\varphi$  удовлетворяет a<sub>1</sub>)—a<sub>4</sub>). Тогда  $T_\varphi$  имеет инвариантную меру  $\mu$ , эквивалентную мере Лебега  $l$  на  $S^1 = M$ . Как эндоморфизм пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  отображение  $T_\varphi$  является точным эндоморфизмом (см. лекцию 7), и  $h(T_\varphi) = \int \ln \varphi'(x) d\mu(x)$ .

Доказательство. Для отображений, удовлетворяющих a<sub>2</sub>); a<sub>3</sub>), можно определить разбиение  $\xi_1$ , состоящее из  $r$  полусегментов  $C_i^{(1)}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , так, что  $T_\varphi C_i^{(1)} = [0, 1)$  и отображение  $T_\varphi: C_i^{(1)} \rightarrow [0, 1)$  взаимно-однозначно. Разбиение  $T_\varphi^{-1} \xi$

также состоит из  $r$  элементов  $T^{-1}C_i^{(1)}$ . Каждый  $T^{-1}C_i^{(1)}$  есть объединение  $r$  полусегментов, лежащих в разных  $C_j^{(1)}$ . Тогда  $\xi_2 = \xi_1 \vee T_\Phi^{-1}\xi_1$  есть разбиение на  $r^2$  полусегментов  $C_{i_1 i_2}^{(2)}$ , для которых  $C_{i_1 i_2}^{(2)} \subset C_{i_1}^{(1)}$ ,  $T_\Phi C_{i_1 i_2}^{(2)} = C_{i_2}^{(1)}$  и отображение  $T_\Phi: C_{i_1 i_2}^{(2)} \rightarrow C_{i_2}^{(1)}$  взаимно-однозначно. Действуя таким же образом и далее, мы можем для каждого  $n$  построить разбиение  $\xi_n = \xi_1 \vee T_\Phi^{-1}\xi_1 \vee \dots \vee T_\Phi^{-n+1}\xi_1$ , состоящее из  $r^n$  элементов. Каждый его элемент есть полусегмент, который мы обозначим  $C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}$ ,  $1 \leq i_s \leq r$ . При этом  $C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} \subset C_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{(n-1)}$  и  $T_\Phi C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} = C_{i_2, \dots, i_n}^{(n-1)}$ ; более того, отображение  $T_\Phi: C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} \mapsto C_{i_2, \dots, i_n}^{(n-1)}$  отображает один полусегмент на другой взаимно-однозначно. Из а<sub>2</sub>) легко теперь следует, что  $l(C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}) \leq \lambda_0^{-n}$ .

Возьмем  $x \in [0, 1)$ , не принадлежащее счетному множеству концов всех  $C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}$ . Для каждого  $n$  мы имеем цепочку включений  $x \in \dots \subset C_{i_1, \dots, i_{n+1}}^{(n+1)} \subset C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} \subset \dots \subset C_{i_1}^{(1)}$ . Тем самым мы построили для  $x$  его символическое представление  $x \Leftrightarrow \{i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots\}$ , которое определяет  $x$  однозначно.

Рассмотрим произвольную полубесконечную последовательность  $i^- = \{\dots, i_{-n}, \dots, i_{-2}, i_{-1}, i_0\}$ . Подчеркнем, что в этой последовательности нижний индекс стремится к  $-\infty$ , в противоположность полубесконечным последовательностям, возникающим при символическом представлении  $x$ .

Лемма 1. Для каждого  $i^-$  существует предел

$$\mu\{i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+1)})}{l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}}^{(n)})}.$$

Этот предел обладает следующими свойствами:

- 1)  $\mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots) \geq \text{const}$ ;
- 2)  $\sum_{i_0} \mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots) = 1$ ;
- 3)  $\left| \frac{\mu(i_0 | i_{-1}, \dots, i_{-s}, i_{-s-1}', i_{-s-2}', \dots)}{\mu(i_0 | i_{-1}, \dots, i_{-s}, i_{-s-1}'', i_{-s-2}'', \dots)} - 1 \right| \leq \text{const} \cdot \lambda_0^{-s\gamma}.$

Доказательство. Обозначим  $l_n = l(i_0 | i_{-1}, \dots, i_{-n}) = \frac{l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+1)})}{l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}}^{(n)})}$  и рассмотрим отношение

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{l(C_{i_{-n-1}, i_{-n}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+2)})}{l(C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+1)})} \cdot \frac{l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}}^{(n)})}{l(C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}}^{(n+1)})}.$$

Мы имеем

$$T_\Phi C_{i_{-n-1}, i_{-n}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+2)} = C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+1)},$$

$$T_\Phi C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}}^{(n+1)} = C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}}^{(n)},$$

и по теореме о среднем значении

$$l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+1)}) = \int_{C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+2)}} \varphi'(x) dx = \varphi'(y_1) l(C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+2)})$$

для некоторого  $y_1 \in C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}, i_0}^{(n+2)}$ ,

$$l(C_{i_{-n}, \dots, i_{-1}}^{(n)}) = \int_{C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}}^{(n+1)}} \varphi'(x) dx = \varphi'(y_2) l(C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}}^{(n+1)})$$

для некоторого  $y_2 \in C_{i_{-n-1}, \dots, i_{-1}}^{(n+1)}$ . Отсюда

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{\varphi'(y_1)}{\varphi'(y_2)} = 1 + \frac{\varphi'(y_1) - \varphi'(y_2)}{\varphi'(y_2)}.$$

Из  $a_1)$  следует  $|\varphi'(y_1) - \varphi'(y_2)| \leq \text{const} \cdot (\text{dist}(y_1, y_2))^r \leq \text{const} \times \lambda_0^{-nr}$ . Отсюда сразу следуют существование предела  $\mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots)$  и все его свойства.

Лемма 1 доказана.

Утверждение леммы чрезвычайно важно. Оно показывает, что динамика прежде всего создает условные вероятности  $\mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots)$ .

Рассмотрим теперь следующую вероятностную теорему. Обозначим через  $\Omega$  пространство дважды-бесконечных последовательностей  $\omega = \{i_s\}_{s=-\infty}^{\infty}$ , где  $1 \leq i_s \leq r$ , и допустим, что дана функция  $\mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots)$  такая, что

I)  $\mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots) \geq \text{const}$ ;

II)  $\sum \mu(i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots) = 1$ ;

III) если

$$\delta_n = \sup_{\substack{i_s, 0 \leq s \leq n, \\ i'_s, s > n, \\ i''_s, s > n}} \left| \frac{\mu(i_0 | i_{-1}, \dots, i_{-n}, i'_{-n-1}, \dots)}{\mu(i_0 | i_{-1}, \dots, i_{-n}, i''_{-n-1}, \dots)} - 1 \right|,$$

то  $\sum \delta_n < \infty$ .

**Теорема 2.** В условиях I)–III) существует одна и только одна вероятностная мера  $P$ , определенная на  $\sigma$ -алгебре борелевских подмножеств пространства  $\Omega$  и инвариантная относительно сдвига  $S$  в  $\Omega$ , для которой

$$P(i_s | i_{s-1}, i_{s-2}, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{s-n}) \quad (1')$$

существует для любого набора  $i_s, i_{s-1}, i_{s-2}, \dots$  и

$$P(i_s | i_{s-1}, i_{s-2}, \dots) = \mu(i_s | i_{s-1}, i_{s-2}, \dots). \quad (1'')$$

**Доказательство.** Прежде всего поясним смысл условия III. Допустим, что требуемая  $P$  уже построена.

Рассмотрим вероятностное распределение «будущего» для различных «прошлых», т. е.

$$P\{i_s, \dots, i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots\} = \prod_{l=1}^s \mu(i_l | i_{l-1}, i_{l-2}, \dots, i_1, i_0, i_{-1}, \dots),$$

$$P\{i_s, \dots, i_0 | i'_{-1}, i'_{-2}, \dots\} = \prod_{l=1}^s \mu(i_l | i_{l-1}, i_{l-2}, \dots, i_1, i_0, i'_{-1}, \dots),$$

и оценим плотность одной меры относительно другой:

$$\begin{aligned} \exp\{-\text{const} - \text{const} \cdot \sum_{k=1}^s \delta_k\} &\leq \\ &\leq \frac{P\{i_s, \dots, i_0 | i_{-1}, i_{-2}, \dots\}}{P\{i_s, \dots, i_0 | i'_{-1}, i'_{-2}, \dots\}} \leq \\ &\leq \exp\{\text{const} + \text{const} \cdot \sum_{k=1}^s \delta_k\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $s \rightarrow \infty$ . Мы видим, что отношение этих вероятностей остается ограниченным сверху и снизу, т. е. условные распределения, отвечающие разным прошлым, равномерно эквивалентны между собой.

Покажем теперь, что хотя бы одно требуемое  $P$  существует. Фиксируем произвольную последовательность  $\{i_s^{(0)}\}_{s=-\infty}^{\infty}$  и для каждого  $s$ ,  $-\infty < s < \infty$ , рассмотрим меру  $P_s^{(0)}$ , определенную на  $\Omega$  следующим образом:

$$\begin{aligned} P_s^{(0)}\{\dots, i_{s-n}^{(0)}, \dots, i_s^{(0)}\} &= 1, \\ P_s^{(0)}\{i_{s+1}, \dots, i_{s+t}\} &= \prod_{l=s+1}^{t+s} \mu(i_l | i_{l-1}, \dots, i_s^{(0)}, i_{s-1}^{(0)}, i_{s-2}^{(0)}, \dots) \end{aligned}$$

для любого  $t \geq 0$ . Мы представляем читателю проверку того, что последнее соотношение определяет корректно распределение вероятностей.

Пространство  $\Omega$  компактно, и поэтому пространство всех вероятностных мер на  $\Omega$  компактно в слабой топологии. Следовательно, найдется подпоследовательность  $\{-t_j\}$ ,  $t_j \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ , такая, что  $P_{-t_j}^{(0)} \Rightarrow P^{(0)}$ .

Мы утверждаем, что для  $P^{(0)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(0)}(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{s-n}) = \mu(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{s-n}, \dots). \quad (2)$$

В самом деле, рассмотрим

$$P^{(0)}(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{s-n}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_{-t_j}^{(0)}(i_s, i_{s-1}, \dots, i_{s-n})}{P_{-t_j}^{(0)}(i_{s-1}, \dots, i_{s-n})}.$$

При фиксированном  $s$  и достаточно больших  $j$

$$P_{-i_j}^{(0)}(i_s, i_{s-1}, \dots, i_{s-n}) = \\ = \sum_{i'_{s-n-1}, \dots, i'_{-i_j+1}} \prod_{l=i_j+1}^s \mu(i_l | i_{l-1}, \dots, i_{s-n}, i'_{s-n-1}, \dots, i_{-i_j}^{(0)}, i_{-i_j-1}^{(0)}), \quad (3)$$

$$P_{-i_j}^{(0)}(i_{s-1}, \dots, i_{s-n}) = \\ = \sum_{i'_{s-n-1}, \dots, i'_{-i_j+1}} \prod_{l=i_j+1}^{s-1} \mu(i_l | i_{l-1}, \dots, i_{s-n}, i'_{s-n-1}, \dots, i_{-i_j+1}^{(0)}, i_{-i_j}^{(0)}). \quad (4)$$

Каждое произведение в (3) имеет один лишний множитель по сравнению с соответствующим произведением в (4), который отличается от  $\mu(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{s-n}, \dots)$  на величину, не превосходящую  $\delta_n$ . Устремляя сперва  $l \rightarrow \infty$ , а потом  $n \rightarrow \infty$ , получим (2).

Теперь покажем единственность  $P^{(0)}$ . Это утверждение вытекает из следующей леммы.

**Лемма 2.** Пусть  $P^{(0)}$  есть распределение вероятностей, удовлетворяющее (1'), (1''). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $m = m(\varepsilon)$ ,  $t = t(\varepsilon)$  и вероятностное распределение  $\bar{P}^{(0, m)}$  на словах  $i_{-m}, \dots, i_m$ , зависящее только от функции  $\mu$  и такое, что

- 1)  $m(\varepsilon) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 2) для любого условного распределения  $P_{i_{-t-1}, i_{-t-2}, \dots}^{(0, m)}$ , т. е.

$$P_{i_{-t-1}, i_{-t-2}, \dots}^{(0, m)}(i_{-m}, \dots, i_m) = P^{(0)}(i_{-m}, \dots, i_m | i_{-t-1}, i_{-t-2}, \dots),$$

индуцированного  $P^{(0)}$ ,

$$\text{Var}(\bar{P}^{(0, m)}, P_{i_{-t-1}, i_{-t-2}, \dots}^{(0, m)}) \leq \varepsilon,$$

где  $\text{Var}$  есть расстояние по вариации между распределениями вероятностей.

**Доказательство.** Возьмем  $t = t(\varepsilon) = q(\varepsilon) \cdot (2m(\varepsilon) + 1) + m(s)$ , где  $q(\varepsilon)$  — целое число. Выпишем условную вероятность

$$p(i_m, i_{m-1}, \dots, i_{-t} | i_{-t-1}, \dots) = \prod_{s=-t}^m \mu(i_s | i_{s-1}, i_{s-2}, \dots)$$

и аппроксимируем ее условной вероятностью цепи Маркова памяти  $2m+1$ :

$$\bar{p}(i_m, i_{m-1}, \dots, i_{-t} | i_{-t-1}, \dots) = \\ = \prod_{b=1}^{q(\varepsilon)} \prod_{\substack{-t(\varepsilon) + l(2m+1) < s \leq \\ \leq -t(\varepsilon) + (l+1)(2m+1)}} \mu(i_s | i_{s-1}, \dots, \\ \dots, i_{-t(\varepsilon) + (l-1)(2m+1) + 1}, i_{-t(\varepsilon) + (l-1)(2m+1)}, 1, 1, \dots) e^{\rho}.$$

Здесь «хвост» из единиц взят для простоты, можно было бы взять в этом месте любую другую последовательность. Оценка  $\rho$  легко вытекает из условия III:

$$|\rho| \leq q(\varepsilon) \sum_{s=2m+1}^{4m+1} \delta_s.$$

Ввиду сходимости ряда  $\sum_s \delta_s < \infty$  для любого  $q = q(\varepsilon)$  можно найти столь большое  $m$ , что  $q(\varepsilon) \sum_{s=2m+1}^{4m+1} \delta_s \leq \varepsilon/3$ . Поэтому если мы положим

$$\bar{P}(i_m, i_{m-1}, \dots, i_{-t}) = \prod_{l=1}^{q(\varepsilon)} \prod_{\substack{-t(\varepsilon)+l(2m+1) \leq s \leq \\ \leq -t(\varepsilon)+(l+1)(2m+1)}} \mu(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{-t(\varepsilon)+(l-1)(2m+1)+1}, 1, \dots, 1, \dots), \quad (5)$$

то

$$\text{Var}(\bar{P}, P_{i_{-t-1}}, \dots) \leq \varepsilon/2.$$

Мера  $\bar{P}$  есть распределение вероятностей, соответствующее стационарной цепи Маркова памяти  $2m+1$ . Соответствующие условные вероятности имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{P}(i_m, \dots, i_{-m} | i_{-m-1}, \dots, i_{-3m-1}) &= \\ &= \prod_{s=-m}^m \mu(i_s | i_{s-1}, \dots, i_{-3m-1}, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Введем линейный оператор  $\Pi$ , действующий на пространстве вероятностных распределений на словах  $(i_m, \dots, i_{-m})$ , порожденный условными вероятностями  $\bar{P}$ . Он обладает следующим свойством (см. выше):

$$\frac{\bar{P}(i_m, \dots, i_{-m} | i_{-m-1}, \dots, i_{-3m-1})}{P(i_m, \dots, i_{-m} | i'_{-m-1}, \dots, i'_{-3m-1})} \geq \text{const} = C_0 > 0,$$

где  $C_0$  не зависит от  $m$ . Обозначим  $\bar{P}^{(0, m)}$  стационарное распределение цепи Маркова, отвечающей стохастическому оператору  $\Pi$ . Тогда из эргодической теоремы для цепей Маркова

$$\text{Var}(\bar{P}^{(0, m)}, \Pi P) \leq (1 - C_0) \text{Var}(\bar{P}^{(0, m)}, P)$$

для любого распределения вероятностей  $P$  на словах  $i_m, \dots, i_{-m}$ . Применяя это неравенство к (5)  $q(\varepsilon)$  раз, где  $q(\varepsilon)$  таково, что  $2(1 - C_0)^{q(\varepsilon)} < \varepsilon/2$ , немедленно получаем

$$\text{Var}(\bar{P}, \bar{P}^{(0, m)}) \leq \varepsilon/2.$$

Отсюда сразу вытекает утверждение леммы.



Теперь мы можем окончить доказательство единственности  $P^{(0)}$ . Обозначим  $P_{-m,m}^{(0)}$  индуцированное  $P^{(0)}$  распределение вероятностей на словах  $i_{-m}, \dots, i_m$ . Из леммы 2 непосредственно следует, что  $\text{Var}(P_{-m,m}^{(0)}, P^{(0,m)}) \leq \varepsilon$ .

Допустим, что существуют два различных распределения вероятностей  $P^{(0)}, Q^{(0)}$ , удовлетворяющие требуемым условиям. Тогда для некоторого  $\alpha > 0$  и всех достаточно больших  $m$  справедливо неравенство  $\text{Var}(P_{-m,m}^{(0)}, Q_{-m,m}^{(0)}) \geq \alpha$ . Но это противоречит неравенствам  $\text{Var}(P_{-m,m}^{(0)}, P^{(0,m)}) \leq \varepsilon$ ,  $\text{Var}(Q_{-m,m}^{(0)}, P^{(0,m)}) \leq \varepsilon$ . Тем самым единственность  $P$  доказана. Инвариантность  $P$  относительно сдвига следует из того, что сдвинутое распределение вероятностей  $P'$ ,  $P'(C) = P(SC)$ , имеет те же свойства, что и  $P$ , и, следовательно, ввиду единственности должно совпадать с  $P$ , что и требовалось доказать.

Вернемся к нашим растягивающим отображениям. В лемме 1 мы построили условные вероятности  $\mu(i_0 | i_{-1}, \dots)$ , удовлетворяющие 1) — 3). Теперь мы можем воспользоваться теоремой 2 и найти меру  $P$  в пространстве  $\Omega$ . Определим меру  $\mu$  на  $[0, 1)$  посредством формулы  $\mu(C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}) = P(i_1, i_2, \dots, i_n)$ .

Лемма 3. Мера  $\mu$  эквивалентна мере Лебега  $l$ .

Доказательство. Мы должны сравнить  $\mu(C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)})$  и  $l(C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)})$ . Напишем (в обозначениях леммы 1)

$$l(C_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}) = l(i_n | i_{n-1}, \dots, i_1) \cdot l(i_{n-1} | i_{n-2}, \dots, i_1) \cdot \dots \cdot l(i_2 | i_1) \cdot l(i_1),$$

где

$$l(i_k | i_{k-1}, \dots, i_1) = l(C_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}) (l(C_{i_1, \dots, i_{k-1}}^{(k-1)}))^{-1}.$$

Из доказательства леммы 1 легко следует, что

$$\exp \{-\text{const} \cdot \lambda^{-sy}\} \leq \frac{l(i_s | i_{s-1}, \dots, i_1)}{\mu(i_s | i_{s-1}, \dots, i_1, 1, \dots, 1, \dots)} \leq \exp \{-\text{const} \cdot \lambda_0^{-sy}\},$$

и из леммы 2

$$\exp \{-\text{const} \cdot \lambda^{-sy}\} = \frac{P(i_s | i_{s-1}, \dots, i_1)}{\mu(i_s | i_{s-1}, \dots, i_1, 1, 1, \dots)} \leq \exp \{\text{const} \cdot \lambda_0^{-sy}\}.$$

Таким образом,

$$\exp \{-\text{const} \cdot \sum_{s \geq 0} \lambda_0^{-sy}\} \leq \frac{\mu(C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)})}{l(C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)})} \leq \exp \{\text{const} \cdot \sum_{s \geq 0} \lambda_0^{-sy}\},$$

что дает утверждение леммы.

Покажем, что  $\mu$  инвариантна относительно  $T_\Phi$ . Мы имеем

$$T_\Phi^{-1}C_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \bigcup_{j=1}^r C_{j i_1 i_2 \dots i_n}^{(n+1)} \text{ и}$$

$$\mu(T_\Phi^{-1}C_{i_1 \dots i_n}) = \sum_{j=1}^r \mu(C_{j i_1 i_2 \dots i_n}^{(n+1)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^r P(j, i_1, \dots, i_n) = P(i_1, \dots, i_n) = \mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}).$$

Здесь мы использовали инвариантность  $P$  относительно сдвига.

Наш следующий шаг состоит в том, чтобы показать, что  $T_\Phi$  есть точный эндоморфизм пространства с мерой  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Напомним (см. лекцию 7), что точность означает, что пересечение разбиений  $\bigwedge_{n \geq 0} T^{-n}\varepsilon = \nu$  (см. лекцию 7), или если  $\mathcal{M}^{(n)}$  есть  $\sigma$ -подалгебра множества вида  $T_\Phi^{-n}C$ ,  $C \in \mathcal{M}$ , то пересечение  $\bigcap_n \mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{N}$ , где  $\mathcal{N}$  — тривиальная  $\sigma$ -алгебра множеств меры 1 и 0.

Допустим, что это утверждение неверно и существует  $A$ ,  $0 < \mu(A) < 1$ , такое, что  $A \in \mathcal{M}^{(n)}$  при любом  $n$ . Для почти каждого  $x \in A$  имеем

$$\frac{\mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \cap A)}{\mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)})} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где  $x \in C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$ . Напишем  $A = T^{-n}A_n$ , где  $\mu(A_n) = \mu(A)$ . Мы покажем, что если

$$\mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \cap T^{-n}A_n) \geq (1 - \varepsilon) \mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)})$$

при некотором  $\varepsilon > 0$ , то  $\mu(C_{j_1 \dots j_n}^{(n)} \cap T^{-n}A_n) \geq (1 - \text{const} \cdot \varepsilon) \times \mu(C_{j_1 \dots j_n}^{(n)})$  для любого набора  $j_1, \dots, j_n$ , что означает  $\mu(T^{-n}A_n) \geq 1 - \text{const} \cdot \varepsilon$ , т. е.

$$\mu(T^{-n}A_n) = \mu(A) = 1.$$

Мы уже показали, что условные меры

$$\mu(C_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_i}^{(n)} | C_{i_1 \dots i_n}^{(n)})$$

при разных  $i_1, \dots, i_n$  эквивалентны, т. е.

$$\frac{\mu(C_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_i}^{(n+s)} | C_{i_1 \dots i_n}^{(n)})}{\mu(C_{i'_1 \dots i'_n j_1 \dots j_i}^{(n+s)} | C_{i'_1 \dots i'_n}^{(n)})} \geq \text{const}$$

для любых  $i, i', j$ . Но это немедленно дает нужное нам неравенство. Таким образом, точность  $T_\Phi$  доказана. Это влечет также эргодичность  $T_\Phi$ .

З а м е ч а н и е. Такие же рассуждения доказывают точность эндоморфизма Гаусса  $Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$  (см. лекцию 9).

Последнее утверждение касается вычисления  $h(T_\Phi)$ . Для любого  $k$  выберем некоторую точку  $y_{i_1 \dots i_k} \in C_{i_1 \dots i_k}^{(k)}$  и введем функцию  $f_k(i_1, \dots, i_k)$ , где  $f_k(i_1, \dots, i_k) = \Phi'(y_{i_1 \dots i_k})$ . Тогда

$$|f_k(i_1, \dots, i_k) - \Phi'(x)| \leq \varepsilon_k$$

для любого  $x \in C_{i_1 \dots i_k}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_k = \text{const} \cdot \lambda_0^{-k\gamma}$ .

Возьмем разбиение  $\xi_1$ . Оно будет, очевидно, образующим разбиением, и поэтому

$$h(T_\Phi) = h(\xi_1, T_\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{n} \sum_{i_1 \dots i_n} \ln \mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) \mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) \right]$$

(см. лекцию 6). Ввиду эквивалентности  $\mu$  и меры Лебега  $l$  мы можем исследовать

$$I_n = -\frac{1}{n} \sum \ln l(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) \mu(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}).$$

Имеем

$$l(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) = l(C_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)}) \cdot l(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) / l(C_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)}).$$

Заметим, что

$$l(C_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)}) = \int_{C_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)}} \Phi'(x) dx = \Phi'(y_{i_2 \dots i_n}) \cdot l(C_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)})$$

и

$$l(C_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)}) = f_k(i_1, \dots, i_k) l(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) \cdot e^{\rho_k},$$

где  $|\rho_k| \leq \text{const} \cdot \varepsilon_k$ . Используя этот процесс и дальше, получим

$$l(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) = \prod_{s=0}^{n-k} \frac{1}{f_k(i_{s+1}, \dots, i_{s+k})} \exp \left\{ \sum_{m=k}^n \rho_m \right\} \cdot a_k,$$

где  $C_k^{-1} \geq a_k \geq C_k$  и  $C_k$  есть положительная постоянная, зависящая только от  $k$ . Поэтому

$$-\frac{1}{2} \ln l(C_{i_1 \dots i_n}^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-k} \ln f_k(i_{s+1}, \dots, i_{s+k}) + \frac{1}{n} \sum_{m=k}^n \rho_m + \frac{1}{n} \ln a_k.$$

Сумма  $\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-k} \ln f_k(i_{s+1}, \dots, i_{s+k})$  ограничена и сходится почти всюду к  $\int \ln f_k(\omega) dP(\omega)$ . Таким образом,

$$|h(\xi_1, T_\Phi) - \int \ln f_k(\omega) dP(\omega)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon_k.$$

Но

$$\int \ln f_k(\omega) dP(\omega) = \sum \ln \varphi'(y_{i_1, \dots, i_k}) \mu(C_{i_1, \dots, i_k}^{(k)})$$

и

$$|\int \ln f_k dP(\omega) - \int \ln \varphi'(x) d\mu(x)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon_k.$$

Это дает

$$|h(\xi_1, T_\varphi) - \int \ln \varphi'(x) d\mu(x)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon_k.$$

Устремляя  $k \rightarrow \infty$ , получаем  $h(\xi_1, T_\varphi) = \int \ln \varphi'(x) d\mu(x)$ . Теперь основная теорема для растягивающих отображений полностью доказана.

Впервые эта теорема была доказана А. Реньи [1]. Формула для энтропии была получена В. А. Рохлиным [2]. Общие кусочно-монотонные отображения, для которых  $\varphi'(x) > 1$ , рассматривались в работе Лясоты и Йорке [3]. Растягивающие отображения встречаются в ряде задач теории чисел. В работе Р. Боузона и К. Сэрис [4] были построены интересные растягивающие отображения, отвечающие дискретным подгруппам группы движений плоскости Лобачевского.

Рассуждения, которые мы выше использовали при доказательстве основной теоремы, наверняка, не самые короткие. Однако они являются типичными в теории гиперболических динамических систем и используются в более общей обстановке (см. книгу Д. Рюэлля [5] и часть V).

Обсудим кратко теперь общую проблему построения абсолютно непрерывной инвариантной меры для других классов отображений отрезка  $[0, 1]$  на себя или в себя. Возьмем произвольную  $C^1$ -функцию  $\varphi(x)$  такую, что  $\varphi(x) \in [0, 1]$  для любого  $x \in [0, 1]$ . Она задает отображение  $T_\varphi: x \rightarrow \varphi(x)$  отрезка  $[0, 1]$  в себя. Плотность  $\pi(x)$  абсолютно непрерывной инвариантной меры удовлетворяет уравнению Рюэлля — Перрона — Фробениуса

$$\pi(x) = \sum_{y_i: \varphi(y_i) = x} \frac{\pi(y_i)}{|\varphi'(y_i)|}.$$

Иногда бывает так, что множество, где  $\pi(x) > 0$ , есть объединение конечного числа интервалов. Помня о таких ситуациях, введем следующее определение.

**Определение 1.** *Отображение  $T_\varphi$  имеет стохастическое поведение, если оно обладает инвариантной мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, и при этом  $\bigwedge_n T_\varphi^{-n} \varepsilon = \nu_0$ , где  $\nu_0$  есть конечное или счетное разбиение.*

Здесь, как и в части I,  $\varepsilon$  обозначает измеримое разбиение на отдельные точки.

Эквивалентная формулировка может быть дана в терминах  $\sigma$ -алгебр. А именно, если  $\mathcal{M}_n$  есть  $\sigma$ -алгебра подмно-

жеств вида  $T_\varphi^{-n}C$ ,  $C \subset M$ , то  $M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \dots$  и  $\bigcap_n T_\varphi^{-n}C = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $\bigcap_n M_n = \mathcal{N}_0$ , где  $\mathcal{N}_n$  есть  $\sigma$ -алгебра, отвечающая конечному или счетному разбиению (см. лекцию 2).

Первый нетривиальный пример отображения  $T_\varphi$  со стохастическим поведением был обнаружен фон Нейманом и Уламом [6]. Для  $\varphi(x) = 4x(1-x)$  они нашли, что  $\pi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$ . Та

же плотность обслуживает отображения  $T_\varphi$ , где  $\varphi$  — произвольный полином Чебышева. Заметим, что для  $\varphi(x) = 4x(1-x)$ ,  $\varphi'(1/2) = 0$ ,  $\varphi(1/2) = 1$  и  $\varphi(\varphi(1/2)) = 0$ , т. е. второй образ критической точки есть периодическая неустойчивая точка. Позднее было понято, что это свойство помогает установить стохастическое поведение. А именно, Бунимович в [7] показал, что  $Tx = \{2\pi k \sin 2\pi x\}$ ,  $k = \pm 1, 2, \dots$ , обладает стохастическим поведением, а Д. Рюэлль в [8] установил тот же факт для  $T_{\varphi_0}$ ,  $\varphi_0(x) = \lambda_0 x(1-x)$ , где  $\lambda_0$  выбрано так, что  $\varphi_0 \circ \varphi_0 \circ \varphi_0(1/2) = u$  и  $u$  есть неустойчивая периодическая траектория периода 3. Наиболее общий результат в этом направлении принадлежит Огневу [9] и Мисюревичу [10]. Они доказали, что если критическая точка за конечное число шагов переходит в неустойчивую периодическую траекторию, то  $T_\varphi$  имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру. Теорема из [8] справедлива в гораздо более общей ситуации, а именно для отображений с  $\varphi \in C^3([0, 1])$ , у которых есть только одна критическая точка и производная Шварца  $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 < 0$ .

Обсудим теперь с более общей точки зрения роль условия на траекторию критической точки. Доказательство основной теоремы для растягивающих отображений показывает, что существование абсолютно непрерывной инвариантной меры должно быть так или иначе связано с неустойчивостью отображения. Если  $\varphi$  имеет критические точки  $x_i$ , где  $\varphi'(x_i) = 0$ , то в этих точках оно в определенном смысле максимально устойчиво. Условие, состоящее в том, что критические точки переходят в неустойчивые периодические точки, как бы преодолевает эту устойчивость.

Можно наложить и более слабые условия на траектории критической точки. Например, достаточно в некоторых случаях потребовать, чтобы траектория любой критической точки оставалась на положительном расстоянии от множества критических точек. Наиболее сильные результаты во всем этом круге вопросов принадлежат М. Якобсону [11], который,

в частности, показал, что для семейства  $\varphi_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$  множество тех значений  $\lambda$ , где  $\varphi_\lambda$  имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, имеет положительную лебегову меру. Другие доказательства теоремы Якобсона даны Бенедиксом и Карлесоном [12] и Гукенхаймером [13] и Рыхликом [14]. Недавно А. Блох и М. Любич [15] доказали, что если  $\varphi$  имеет одну критическую точку,  $S\varphi < 0$  и  $T_\varphi$  имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, то эта мера эргодична. Неизвестно, будет ли всегда в этом случае энтропия  $h(T_\varphi) > 0$ .

Вероятностная теорема, о которой идет речь в тексте, может быть выведена из общих результатов Добрушина о свойствах гиббсовских распределений или из одной теоремы Рюэлля (см. [5]), но мы предпочли привести независимое замкнутое доказательство.

### ССЫЛКИ

- [1] Renyi A. Representations of real numbers and their properties // Acta Math. Sci. Hungar.—1957.—V. 8.—P. 477—493.
- [2] Рохлин В. А. Точные эндоморфизмы пространств Лебега // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1961.—Т. 25.—С. 499—530.
- [3] Lasota A., Yorke J. On the Existence of Invariant measures for piecewise Monotone Transformations // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—V. 186.—P. 481—488.
- [4] Bowen R., Series C. Markov maps Associated with Fuchsian Groups // Publ. Math. IHES.—1979.—V. 50.—P. 153—170.
- [5] Ruelle D. Thermodynamic Formalism.—Addison-Wesley: Reading, 1978.
- [6] Ulam S. M., von Neumann J. On combination of stochastic and deterministic processes // Bull. Amer. Math. Soc.—1947.—V. 53.—P. 1120.
- [7] Бунимович Л. А. Об одном преобразовании окружности // Мат. заметки.—1970.—Т. 8.—С. 205—216.
- [8] Ruelle D. Applications conservant une mesure absolument continue par rapport a  $dx$  sur  $[0,1]$  // Comm. Math. Phys.—1977.—V. 55.—P. 47—51.
- [9] Огнев А. И. Метрические свойства одного класса отображений отрезка // Мат. заметки.—1980.—Т. 30.—С. 723—736.
- [10] Misiurewicz M. Absolutely continuous invariant measures for certain maps of an interval // Publ. Math. IHES.—1981.—V. 53.—P. 17—51.
- [11] Jacobson M. Absolutely continuous invariant measures for certain maps of an interval // Comm. Math. Phys.—1981.—V. 81.—P. 39—88.
- [12] Benedicks M., Carleson L. On iterations of  $1-ax^2$  on  $[-1, 1]$  // Ann. of Math.—1985.—V. 122.—P. 1—25.
- [13] Guckenheimer J. One-dimensional Mappings and Strange Attractors // Contemp. Math.—1987.—V. 58, Part III.—P. 143—160.
- [14] Rychlik M. A proof of Jakobson's theorem // Ergodic Theory and Dynamical Systems.—1988.—V. 8.—P. 93—109.
- [15] Блох А., Любич М. Эргодические свойства отображений интервала // Функцион. анализ и его прил.—1989.—Т. 23, вып. 1.—С. 59—60.

## ЧАСТЬ IV

### ЭЛЕМЕНТЫ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИКИ

В этой части мы рассмотрим несколько проблем, относящихся к двумерной динамике. В целом ряде случаев полные доказательства довольно длинные. Поэтому иногда мы ограничиваемся только качественным обсуждением и приводим соответствующие ссылки.

#### ЛЕКЦИЯ 13

#### СТАНДАРТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, ИЛИ ОТОБРАЖЕНИЕ ЧИРИКОВА, ОТОБРАЖЕНИЕ С ПЕРЕКРУЧИВАНИЕМ, ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ, ТЕОРИЯ ОБРИ—МЕЗЕРА

Рассмотрим произвольную локально-конечную конфигурацию  $\{x_m\}$  точек на прямой  $\mathbf{R}^1$ . Локальная конечность означает, что число точек, принадлежащих любому интервалу, конечно. Напишем формальное выражение для потенциальной энергии этой конфигурации в виде

$$U(\{x_m\}) = \frac{1}{2} \sum_m (x_m - x_{m-1} - \gamma)^2 + \frac{k}{2\pi} \sum_m (1 - \cos 2\pi x_m). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$ ,  $k$  — параметры, первая сумма описывает энергию внутреннего взаимодействия точек, а вторая сумма характеризует их энергию во внешнем периодическом поле. Система точек с потенциальной энергией (1) называется в статистической механике *моделью Френкеля — Конторовой*.

Естественная проблема, которая возникает в связи с (1), состоит в нахождении конфигураций с минимальной энергией, или основных состояний. Первая сумма принимает наименьшее значение, когда  $x_m - x_{m-1} = \gamma$ , т. е.  $x_m = m\gamma + a$ . Вторая сумма минимальна, когда все  $x_m$  целые. Взаимоотношение между ними как функция параметров  $\gamma$ ,  $k$  определяет всю сложную структуру множества основных состояний. Введем теперь следующее определение.

**Определение 1.** Конфигурация  $\{x_m^{(0)}\}$  называется *основным состоянием*, если для любой конфигурации  $\{x_m\}$ , отличающейся от  $\{x_m^{(0)}\}$  положением конечного числа точек, т. е.

$x_m = x_m^{(0)}$  для всех  $m$ ,  $|m| > N$ , разность  $U\{x_m\} - U(\{x_m^{(0)}\})$  неотрицательна:

$$U(\{x_m\}) - U(\{x_m^{(0)}\}) = \frac{1}{2} \sum_{|m| \leq N} [(x_m - x_{m-1} - \gamma)^2 - (x_m^{(0)} - x_{m-1}^{(0)} - \gamma)^2] + \frac{k}{2\pi} \sum_{|m| \leq N} (\cos 2\pi x_m^{(0)} - \cos 2\pi x_m) \geq 0.$$

Из этого определения сразу следует необходимое условие для того, чтобы конфигурация  $\{x_m^{(0)}\}$  была основным состоянием:

$$\left. \frac{\partial U(\{x_m\})}{\partial x_n} \right|_{\{x_m\} = \{x_m^{(0)}\}} = 0, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2)$$

В явном виде (2) означает, что

$$-x_{n+1}^{(0)} + 2x_n^{(0)} - x_{n-1}^{(0)} + k \sin 2\pi x_n^{(0)} = 0, \quad -\infty < n < \infty. \quad (3)$$

Пространство последовательностей  $\{x_n^{(0)}\}$ , удовлетворяющих (3), двумерно, поскольку любая пара начальных данных  $(x_0^{(0)}, x_1^{(0)})$  определяет однозначно всю последовательность. Положим  $z_n = x_n - x_{n-1}$ ,  $\varphi_n = \{x_n\}$ , где  $\{\cdot\}$  — дробная часть. Тогда из (3)

$$z_{n+1} = z_n + k \sin 2\pi \varphi_n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + z_{n+1} \pmod{1}. \quad (4)$$

По последовательности  $\{z_n, \varphi_n\}$  мы можем восстановить последовательность  $\{x_m\}$  однозначно с точностью до целочисленного сдвига.

Рассмотрим двумерный цилиндр  $S$  с координатами  $(z, \varphi)$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,  $\varphi \in [0, 1)$  и отображение  $T$  этого цилиндра на себя, задаваемое формулой  $T(z, \varphi) = (z', \varphi')$ , где  $z' = z + k \sin 2\pi \varphi$ ,  $\varphi' = \varphi + z' \pmod{1}$ . Выражение (4) означает, что любому основному состоянию соответствует траектория отображения  $T$ , но не наоборот. Заметим, кроме того, что  $T$  не зависит от  $\gamma$ .

**Определение 2.**  $T$  называется стандартным отображением, или отображением Чирикова.

Б. В. Чириков — советский физик, который ввел это отображение более двадцати лет назад в связи с некоторыми проблемами теории нелинейных колебаний [1]. С тех пор отображение Чирикова было и продолжает оставаться предметом многих глубоких исследований. Ниже мы обсудим некоторые строгие результаты, относящиеся к  $T$ . Вначале, однако, мы введем более общий класс отображений, включающий в себя отображение Чирикова как частный случай.



Возьмем функцию двух переменных  $L(y, y')$  такую, что

1.  $L(y+1, y'+1) = L(y, y')$ ,
2.  $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} > 0$ ,

и введем обобщенную модель Френкеля—Конторовой, для которой потенциальная энергия такова:

$$U(\{x_m\}) = \sum_m L(x_m, x_{m-1}). \quad (5)$$

Определение основного состояния естественно переносится на этот случай, и (2) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = \frac{\partial L(x_{n+1}, x_n)}{\partial x_n} + \frac{\partial L(x_n, x_{n-1})}{\partial x_n} = 0. \quad (6)$$

Ввиду свойств 1, 2 формула (6) задает отображение цилиндра  $S$ . Такое отображение называется *отображением с перекручиванием*, поскольку образ любой вертикальной прямой есть кривая, для которой  $\frac{dz}{d\varphi} > 0$ . Для отображения Чирикова

$$L(y, y') = \frac{1}{2}(y - y' - \gamma)^2 + \frac{k}{2\pi}(1 - \cos^2 \pi y).$$

Многие свойства отображения Чирикова справедливы для всего класса отображений с перекручиванием.

Наше определение 1 основных состояний близко к некоторым определениям в статистической механике и дифференциальной геометрии. В статистической механике широко распространены исследования решетчатых моделей. В этих моделях рассматриваются решетки  $\mathbf{Z}^d$  и конфигурации  $\varphi = \{\varphi(m)\}$ ,  $m \in \mathbf{Z}^d$ , заданные на них. Значения  $\varphi(n)$  часто предполагаются принадлежащими конечному множеству  $\Phi$ . Потенциальная энергия конфигурации  $\varphi$  во многих случаях записывается в виде

$$U(\varphi) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} U(\{\varphi(n), \text{dist}(n, m) \leq R\}).$$

Отдельное слагаемое описывает взаимодействие  $\varphi(m)$  с остальной конфигурацией. Оно зависит только от вида конфигурации  $\varphi$  в окрестности радиуса  $R$  точки  $m$ . Число  $R$  называется радиусом взаимодействия. Конфигурация  $\psi$  называется основным состоянием, если для любой конфигурации  $\varphi$ , отличающейся от  $\psi$  в конечном числе точек решетки,

$U(\varphi) \geq U(\psi)$  (см. [2]). Ясно, что это определение той же природы, что и определение 1.

Далее, рассмотрим гладкое компактное риманово многообразие  $Q$  и возьмем на нем геодезическую  $\gamma = \{\psi(t)\}$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Следующее определение было введено более шестидесяти лет назад М. Морсом [3].

**Определение 3.** Геодезическая  $\gamma$  называется геодезической класса  $A$ , если для любой кривой  $\gamma'$ , отличающейся от  $\gamma$  конечным отрезком,  $l(\gamma') \geq l(\gamma)$ , где  $l$  — длина.

Это определение имеет ту же природу, что и определение 1. В действительности имеется много общего между теорией основных состояний модели Френкеля — Конторовой и теорией геодезических класса  $A$ .

Вернемся к отображению Чирикова. Иногда нам будет удобнее формулировать утверждения для модели Френкеля — Конторовой и затем переформулировать их для отображения Чирикова. Пусть  $\gamma > |k| \neq 0$ . Фиксируем два целых числа  $p, q$  и рассмотрим всевозможные конфигурации  $\{x_m\}$ , для которых  $x_{m+q} = x_m + p$ . Это означает, что все конфигурации являются периодическими с периодом  $p$  и на каждом интервале длины  $p$  имеется  $q$  точек. Мы будем называть такие конфигурации  $(p, q)$ -конфигурациями. Пространство  $(p, q)$ -конфигураций обозначим  $M_{p,q}$ . Оно представляет собой конечномерное компактное пространство, если допустить также конфигурации, у которых несколько точек совпадают. Введем

$$U_{p,q}(\{x_n\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^q \left[ (x_n - x_{n-1} - \gamma)^2 + \frac{k}{2\pi} (1 - \cos 2\pi x_n) \right],$$

равную энергии конфигурации на одном периоде. Функция  $U_{p,q}$  определена и непрерывна на  $M_{p,q}$ . Поэтому существует  $(p, q)$ -конфигурация  $\{x_m^{(0)}\}$ , для которой

$$U_{p,q}(\{x_m^{(0)}\}) = \max_{\{x_m\} \in M_{p,q}} U_{p,q}(\{x_m\}).$$

Из предположения  $\gamma > |k| \neq 0$  легко следует, что  $\{x_m^{(0)}\}$  есть внутренняя точка  $M_{p,q}$  и

$$\left. \frac{\partial U_{p,q}}{\partial x_n} \right|_{\{x_m\} = \{x_m^{(0)}\}} = 0, \quad 1 \leq n \leq q.$$

Тогда соответствующая последовательность  $\{z_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}\}$  (см. [4]) определяет траекторию  $T$ , для которой  $\{z_{n+q}^{(0)}, \varphi_{n+q}^{(0)}\} = \{z_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}\}$ , т. е.  $\{z_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}\}$  есть периодическая траектория  $T$  периода  $q$ , делающая  $p$  оборотов вокруг

цилиндра  $C$ . Мы будем называть такую траекторию  $(p, q)$ -траекторией. Эти аргументы приводят к следующей теореме.

**Теорема 1.** *Для любой пары  $(p, q)$  существует по крайней мере одна  $(p, q)$ -траектория.*

Теорема 1 может быть усилена следующим образом.

**Теорема 2** (Биркгоф [4]). *Для любой пары  $(p, q)$  существуют по крайней мере две  $(p, q)$ -траектории.*

Мы наметим только доказательство теоремы 2, опустив ряд деталей. Возьмем  $(p, q)$ -конфигурацию  $\{x_m^{(0)}\}$ , построенную выше, и обозначим  $\{z_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}\}$  соответствующую траекторию  $T$ . Рассмотрим непрерывные деформации  $\{x_m^{(0)}\}$  следующего вида. Пусть  $I$  — единичный отрезок и  $h: I \rightarrow M_{p,q}$  — непрерывное отображение такое, что  $h(0) = \{x_m^{(0)}\}$ ,  $h(1) = \{x_{m+1}^{(0)}\}$  и  $h(t)x_m^{(0)}$  есть непрерывная возрастающая функция  $t$  при каждом  $m$ . Положим  $U = \max_{h} \min_{t \in [0, 1]} U_{p,q}(h(t))$ .

Можно показать, что  $U < U_{p,q}(\{x_m^{(0)}\})$  и  $U = U_{p,q}(\{x_m^{(1)}\})$ . Конфигурация  $\{x_m^{(1)}\}$  порождает  $(p, q)$ -траекторию  $\{z_n^{(1)}, \varphi_n^{(1)}\}$ , которая отлична от  $\{z_n^{(0)}, \varphi_n^{(0)}\}$ . Это и дает желаемый результат.

Обсудим теперь красивую теорию Обри — Мезера (см. [5], [6], [7]), дающую достаточно детальное описание множества основных состояний. Мы будем придерживаться здесь изложения Обри. Фундаментальная лемма Обри утверждает, что если  $\{x_m\}$  есть основное состояние, то существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x_n = p$ , который по естественным причинам называется числом вращения. Заметим, что аналогичное утверждение для геодезических класса  $A$  может быть найдено в работах М. Морса [3] и Г. Хедлунда [8].

Для любого  $p$  существуют основные состояния. Если  $p$  рационально,  $p = p/q$ , то соответствующее основное состояние есть  $(p, q)$ -конфигурация. На самом деле доказательство теоремы 1 уже дает основное состояние. Для иррациональных  $p$  можно найти такие измеримые периодические функции  $F_p(\varphi)$  периода 1, что все основные состояния с данным  $p$  параметризуются точкой  $\alpha \in S^1$  и могут быть записаны в следующем виде:  $x_m = m\rho + \alpha + F_p(m\rho + \alpha)$ . При этом возможны два случая:

1.  $F_p$  непрерывна. Тогда отображение  $g: S^1 \rightarrow C$ , где  $g(\varphi) = (\rho + F_p(\varphi) - F_p(\varphi - \rho), \varphi + F_p(\varphi))$ , определяет замкнутую кривую  $\Gamma_p$  на  $C$ . Легко видеть, что все траектории  $\{z_n, \varphi_n\}$ , отвечающие основным состояниям, лежат на  $\Gamma_p$ . Это означает, что если  $F_p$  непрерывна, то  $T$  имеет инвариантную кривую. На этой кривой  $T$  в надлежащей переменной сводится к вращению

на угол  $\rho$ . Используя одну теорему Биркгофа [4], можно показать, что  $\Gamma_\rho$  есть график некоторой функции  $z=f_\rho(\varphi)$ , удовлетворяющей условию Липшица.

2.  $F_\rho$  разрывна. В этом случае  $F_\rho$  — чисто разрывная функция, т. е. сумма ее скачков равна 1. Тогда  $T$  имеет замкнутое, нигде не плотное инвариантное множество, проекция которого на ось  $\varphi$  представляет собой также замкнутое, нигде не плотное множество. Следуя Персивалю, мы будем называть такие множества *кантороторами*.

Теория Обри — Мезера ничего не говорит о существовании непрерывных функций  $F_\rho$ . Эта проблема может быть рассмотрена с помощью известной теории Колмогорова — Арнольда — Мезера (теории КАМ), которая достаточно широко известна. Случай стандартного отображения и отображений с перекручиванием специально рассмотрен в книге Ю. Мезера [9]. Мы сформулируем только результат.

**Теорема 3.** Для всех достаточно малых  $k$  существует множество  $R_k \subset [0, \infty)$  чисел вращения такое, что

1)  $l(R_k \cap [0, t]) \rightarrow t$  при  $k \rightarrow 0$ , для любого  $t$ ;

2) для любого  $\rho \in R_k$  существует инвариантная кривая  $\Gamma_\rho$ , для которой соответствующая функция  $f_\rho$  вещественно-аналитична; более того,  $l(c_t \cap \bigcup_{\rho \in R_k} \Gamma_\rho) \rightarrow t$  при  $k \rightarrow 0$  для любого  $t$ , где  $c_t$  есть подмножество цилиндра  $c_t = \{(z, \varphi), |z| < t\}$ .

В 1) и 2)  $l$  означает меру Лебега.

Конструкция инвариантных кривых в теории КАМ не имеет ничего общего с теорией основных состояний. В действительности требуются дополнительные аргументы для того, чтобы показать, что траектории, которые лежат на КАМ-кривых, соответствуют основным состояниям (это было сделано в работе Лазуткина и Термана [10]).

Покажем теперь, что при  $k > 1$  отображение Чирикова не имеет инвариантных кривых, которые могут быть заданы непрерывными функциями  $z=f(\varphi)$ . Условие инвариантности приводит к следующему функциональному уравнению для  $f$ :

$$f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi = f(\varphi + f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi). \quad (7)$$

**Теорема 4** (см. [12]). Если  $k > 1$ , то уравнение (7) не имеет непрерывных решений.

**Доказательство.** Вначале покажем, что  $\varphi + f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi$  принимает каждое значение только один раз. В самом деле, если для

$$\varphi_2 + f(\varphi_2) + k \sin 2\pi\varphi_2 = \varphi_1 + f(\varphi_1) + k \sin 2\pi\varphi_1, \quad (8)$$

то из (7) следует

$$f(\varphi_2) + k \sin 2\pi\varphi_2 = f(\varphi_1) + k \sin 2\pi\varphi_1$$

и  $\varphi_2 = \varphi_1$ , что противоречит неравенству  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Поэтому функция  $F(\varphi) = \varphi + f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi$  строго монотонно возрастающая, поскольку  $F(\varphi + 1) = F(\varphi) + 1$ . Заметим теперь, что

$$0 \leq \max_{\varphi} [f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi] - \min_{\varphi} [f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi] \leq 1. \quad (9)$$

В самом деле, пусть

$$f(\varphi') + k \sin 2\pi\varphi' = \max_{\varphi} [f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi],$$

$$f(\varphi'') + k \sin 2\pi\varphi'' = \min_{\varphi} [f(\varphi) + k \sin 2\pi\varphi].$$

Если  $\varphi' < \varphi''$ , то из монотонности  $F$

$$0 < f(\varphi') + k \sin 2\pi\varphi' - (f(\varphi'') + k \sin 2\pi\varphi'') < \varphi'' - \varphi' \leq 1.$$

Если же  $\varphi'' < \varphi'$ , то в силу той же монотонности  $F$

$$\varphi'' + (f(\varphi'') + k \sin 2\pi\varphi'') < \varphi' + (f(\varphi') + k \sin 2\pi\varphi'),$$

$$0 < (\varphi' - \varphi'') + (f(\varphi') + k \sin 2\pi\varphi') - (f(\varphi'') + k \sin 2\pi\varphi'') < 1$$

и тем более

$$(f(\varphi') + k \sin 2\pi\varphi') - (f(\varphi'') + k \sin 2\pi\varphi'') < 1.$$

В частности,

$$(f(1/4) + k) - (f(-1/4) - k) \leq 1,$$

т. е.

$$f(1/4) - f(-1/4) \leq 1 - 2k < -1. \quad (10)$$

Возьмем  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\bar{\varphi}}$ , для которых

$$f(\bar{\varphi} + f(\bar{\varphi}) + k \sin 2\pi\bar{\varphi}) = \min_{\varphi} f(\varphi),$$

$$f(\bar{\bar{\varphi}} + f(\bar{\bar{\varphi}}) + k \sin 2\pi\bar{\bar{\varphi}}) = \max_{\varphi} f(\varphi).$$

Тогда с помощью (7) и (9) получим

$$\min_{\varphi} f(\varphi) - \max_{\varphi} f(\varphi) =$$

$$= f(\bar{\varphi} + f(\bar{\varphi}) + k \sin 2\pi\bar{\varphi}) - f(\bar{\bar{\varphi}} + f(\bar{\bar{\varphi}}) + k \sin 2\pi\bar{\bar{\varphi}}) \geq -1,$$

что противоречит (10). Теорема 4 доказана.

Обозначим через  $k_{cr}$  наибольшее значение параметра, такое, что при всех  $k > k_{cr}$  отображение  $T$  не имеет инвариант-

ных кривых, охватывающих  $C$ . Значение  $k_{cr}$  было исследовано впервые численно в работе Дж. Грина [13]. Его результат дает  $k_{cr} = 0,972/2\pi$ . Наилучшая оценка типа машинных доказательств была получена в работе Мак-Кая и Персиваля [14]:  $k_{cr} \leq 0,984/2\pi$ . Теоретические оценки  $k_{cr}$  снизу значительно менее точны. Дж. Грин в [13] численно показал также, что при  $k = k_{cr}$  последняя кривая  $\Gamma_p$  соответствует числу вращения  $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (золотое сечение).

При  $k > k_{cr}$  все инвариантные кривые  $\Gamma_p$  уже разрушились. Тем самым для таких  $k$  возможны неограниченные траектории  $T$ . Сформулируем несколько гипотез, касающихся этих траекторий. Ни одна из них в настоящий момент строго не доказана.

Н1. Для  $k > k_{cr}$  существует подмножество  $A \subset C$  положительной лебеговской меры такое, что

$$\int_A z_n^2(z_0, \varphi_0) dz_0 d\varphi_0 \sim \text{const} \cdot n \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Иными словами, среднее смещение точки под действием динамики растет как  $\sqrt{n}$ , т. е. так же, как смещение точки при случайных блужданиях.

Динамическая причина, из-за которой Н1 может быть верна, состоит в том, что при  $k > k_{cr}$  инвариантные кривые разрушились и превратились в кантороторы. Между кантороторами образовались щели, через которые возможен переход. В работе Мак-Кая, Миса и Персиваля [15] было введено и изучалось понятие потока через канторотор.

Л. Пустыльников [16] показал, что существует бесконечное множество значений  $k$ , при которых можно найти множество положительной меры  $B_k \subset C$  такое, что  $z_n(z_0, \varphi_0) \geq \text{const} \cdot n$  для всех  $(z_0, \varphi_0) \in B_k$ . Однако есть основания полагать, что для точек  $(z_0, \varphi_0) \in B_k$  их траектории являются нетипичными.

Н2. Отображение Чирикова  $T$  может быть естественно сведено к отображению двумерного тора, если переменную  $z$  также рассматривать  $\text{mod } 1$ . Тогда энтропия по отношению к мере Лебега  $h(T) > 0$  для всех  $k \neq 0$  и, более того, стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ .

В следующей лекции мы докажем теорему, которую можно рассматривать как частичную поддержку Н2.

Анализ  $T$  в окрестности  $k = k_{cr}$  проводится с помощью упоминавшегося ранее метода ренормгруппы. Очень интересные относящиеся к этому результаты были получены в неопубликованной диссертации Р. Мак-Кая [17].

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° По поводу преобразования Чирикова см. его обзор

[1] Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems// *Physics Reports*.—1979.—V. 52.—P. 263—379.

Иногда в западной литературе встречается также термин «преобразование Чирикова—Тейлора».

2° По поводу основных состояний решетчатых систем статистической механики и их роли в теории фазовых переходов см.

[2] Синай Я. Г. Математическая теория фазовых переходов.—М.: Физматгиз, 1981.

3° Геодезические класса  $A$  изучались в работе

[3] Morse M. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one// *Trans. Amer. Math. Soc.*—1924.—V. 26.—P. 25—60.

Упомянутую выше теорему Биркгофа см. в работе

[4] Birkhoff G. D. Sur quelques courbes fermées remarquables// *Bull. Soc. Math. France*.—1932.—T. 60.—Collected Papers. V. 11.—P. 444—461.

См. также

Биркгоф Дж. Динамические системы.—М.: Гостехиздат, 1941.—320 с.

4° Теорию Обри—Мезера см. в работах

[5] Aubry S. The twist map, the extended Frenkel—Kontorova model and the devil's staircase// *Physica D*.—1983.—V. 7D, № 1—3.—P. 240—258.

[6] Mather J. N. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphism of the annulus// *Topology*.—1982.—V. 21, № 4.—P. 457—467.

[7] Percival I. C. A variational principle for invariant tori of fixed frequency// *J. Phys. A: Math. Nucl. and Gen.*—1979.—V. 12, № 3.—P. 57—60.

5° Следующие далее ссылки были упомянуты в тексте лекции.

[8] Hedlund G. A. Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients// *Ann. Math., Ser. 2*.—1932.—V. 33, № 4.—P. 719—739.

[9] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Мир, 1973.—165 с.

[10] Lazutkin V. F., Terman D. Percival Variational Principle for Invariant Measures and Commensurate Incommensurate Phase Transitions in One-Dimensional Chains// *Comm. Math. Phys.* 1984.—V. 94, № 4.—P. 511—522.

Наилучшие оценки снизу параметра  $k_{cr}$ , насколько мне известно, были получены в работе

[11] Celletti A., Chierchia L. Rigorous Estimates for a Computer-assisted KAM-theory// *J. Math. Phys.*—1987.—V. 28.—P. 2078.

Более тонкие аналитические оценки области значений параметра  $k$ , при которых уравнение (7) не имеет решений, см. в

[12] Mather J. N. A criterion for non-existence of invariant circles// *Erg. Th., Dyn. Syst.*—1984.—V. 4.—P. 301—309.

[13] Greene J. M. A method for determining a stochastic transition// *J. Math. Phys.*—1979.—V. 20.—P. 1183—1201.

[14] Mac-Kay R. S., Percival I. C. Converse KAM: Theory and Practice// *Comm. Math. Phys.*—1985.—V. 98.—P. 469.

[15] Mac-Kay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. Transport in Hamiltonian systems// *Physica*.—1984.—V. 13D.—P. 55—68.

[16] Mather J. Variational Construction of Orbits of Twist Diffeomorphisms.—Preprint.—Princeton University, 1990.

[17] Пустыльников Л. Д. Об асимптотическом поведении траекторий стандартного отображения // Матем. заметки. 1986. Т. 39, № 5.—С. 719—726.

[18] Mac-Kay R. S. Ph. D. Thesis Princeton University, 1982.

## ЛЕКЦИЯ 14

### ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ТОЧКИ, ИХ УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим снова отображение Чирикова  $T(z, \varphi) = (z', \varphi')$ , где

$$z' = z + \lambda \sin 2\pi\varphi, \quad \varphi' = \varphi + z' \pmod{1}. \quad (1)$$

Допустим, что  $\lambda > 0$  мало,  $\lambda \ll 1$ . Введем новые переменные  $Z = z\lambda^{-1/2}$ ,  $\Phi = \varphi$ . В этих переменных  $T$  принимает вид  $T(Z, \Phi) = (Z', \Phi')$ , где

$$\frac{Z' - Z}{\sqrt{\lambda}} = \sin 2\pi\Phi, \quad \frac{\Phi' - \Phi}{\sqrt{\lambda}} = Z'. \quad (2)$$

Тогда (2) может рассматриваться как разностная схема для системы дифференциальных уравнений, описывающей движение маятника

$$\frac{dZ}{dt} = \sin 2\pi\Phi, \quad \frac{d\Phi}{dt} = Z. \quad (3)$$

Иными словами, (3) есть предел (2) при  $\lambda \rightarrow 0$ . Система (3) есть гамильтонова система с одной степенью свободы, имеющая первый интеграл  $H(Z, \Phi) = \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi\Phi$ . Тогда интегральные кривые (3) представляют собой линии уровня функции  $H(Z, \Phi)$  на  $(Z, \Phi)$ -плоскости (рис. 14.1).

Нас будут особенно интересовать сепаратрисные решения, соответствующие  $H=1$ . Удобно рассматривать их как состоящие из точки  $(0, 0)$  ( $= (0, 1)$  на цилиндре) и двух кривых  $\Gamma^{(s)}$ ,  $\Gamma^{(u)}$  (рис. 14.2), проходящих через  $(0, 0)$  под разными углами. Если  $(Z(0), \Phi(0)) \in \Gamma^{(s)}$  ( $\Gamma^{(u)}$ ), то решение  $(Z(t), \Phi(t)) \rightarrow (0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). По этой причине эти кривые называются сепаратрисами или устойчивым и неустойчивым многообразиями точки  $(0, 0)$ . При  $t=0$  они совпадают в том смысле, что при продолжении по  $t$  в противоположную сторону одна кривая переходит в другую.



При  $\lambda \neq 0$  мы будем иметь дело с отображением (2). Точка  $(0, 0)$  есть неподвижная точка для  $T$ . Линеаризация  $T$  около  $(0, 0)$  имеет вид

$$Z' = Z + 2\pi\sqrt{\lambda}\Phi, \quad \Phi' = \sqrt{\lambda}Z + \Phi(1 + 2\pi\lambda). \quad (4)$$

Матрица  $dT = \begin{vmatrix} 1 & 2\pi\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & 1 + 2\pi\lambda \end{vmatrix}$ . Ее детерминант равен 1, а след больше 2. Поэтому  $dT$  имеет одно вещественное собственное значение  $\mu_1 > 1$  и другое  $\mu_2 < 1$ .

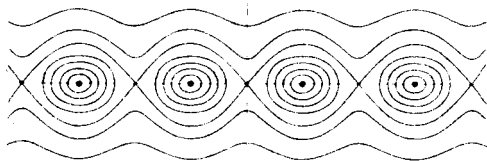


Рис. 14.1

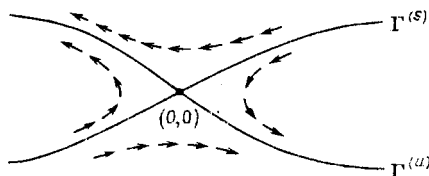


Рис. 14.2

Пусть  $T$  есть  $C^1$ -диффеоморфизм  $C^\infty$ -многообразия  $M$  и некоторая точка  $O \in M$  есть неподвижная точка  $T$ , т. е.  $TO = O$ . Обозначим  $dT$  дифференциал  $T$  в точке  $O$ ; множество собственных значений  $dT$  обозначим  $\text{Spec } dT$ .

**Определение 1.** Точка  $O$  называется гиперболической, если  $\text{Spec } dT \cap S^1 = \emptyset$ . Если  $\text{Spec } dT \cap \{z \mid |z| > 1\} \neq \emptyset$ ,  $\text{Spec } (dT) \cap \{z \mid |z| < 1\} \neq \emptyset$ , то точка  $O$  называется собственно гиперболической.

**Определение 1'.**  $O$  называется гиперболической периодической точкой  $T$ , если  $O$  есть гиперболическая точка  $T^p$  при некотором  $p \neq 0$ . Наименьшее  $p$  называется периодом  $O$ .

Предыдущее обсуждение показывает, что  $(0, 0)$  есть гиперболическая неподвижная точка отображения (2).

Пусть  $O$  — гиперболическая неподвижная точка  $C^r$ -дiffeоморфизма  $T$ ,  $k = \# \{ \lambda \in \text{Spec } dT \mid |\lambda| > 1 \}$ ,  $l = \# \{ \lambda \in \text{Spec } dT \mid |\lambda| < 1 \}$ . Тогда касательное пространство  $\mathcal{T}_O$  к  $M$  в точке  $O$  можно разложить в сумму  $\mathcal{T}_O = \mathcal{T}^{(u)} + \mathcal{T}^{(s)}$ ,  $\dim \mathcal{T}^{(u)} = k$ ,  $\dim \mathcal{T}^{(s)} = l$ ,  $k + l = n$ ,  $dT(\mathcal{T}^{(s)}) = \mathcal{T}^{(s)}$ ,  $dT(\mathcal{T}^{(u)}) = \mathcal{T}^{(u)}$ . Более того, в  $\mathcal{T}_O$  можно задать такую метрику, что  $dT|_{\mathcal{T}^{(s)}}$ ,  $(dT)^{-1}|_{\mathcal{T}^{(u)}}$  будут сжатиями в этой метрике. Напомним теперь классическую теорему Адамара — Перрона. Более общая форма теоремы Адамара — Перрона обсуждается также в части V.

**Теорема 1.** Пусть  $O$  есть гиперболическая неподвижная точка  $T$ . Тогда в некоторой окрестности  $U$  точки  $O$  существуют  $k$ -мерное  $C^{r-1}$ -подмногообразие  $\Gamma^{(u)}$  и  $l$ -мерное  $C^{r-1}$ -подмногообразие  $\Gamma^{(s)}$ , проходящие через  $O$  и обладающие следующими свойствами:

1. Если  $x \in \Gamma^{(s)}$ , то  $T^r x \in \Gamma^{(s)}$  для всех  $r > 0$  и  $T^r x \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Если  $x \in \Gamma^{(u)}$ , то  $T^{-r} x \in \Gamma^{(u)}$  для всех  $r > 0$  и  $T^{-r} x \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

2. Касательными плоскостями к  $\Gamma^{(s)}$  и  $\Gamma^{(u)}$  в точке  $O$  служат  $\mathcal{T}^{(s)}$  и  $\mathcal{T}^{(u)}$  соответственно.

3. Введем в  $U$  гладкие координаты  $(u_1, \dots, u_n)$  так, что  $k$ -мерная координатная плоскость  $(u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$  касается  $\mathcal{T}^{(u)}$  в точке  $O$ ,  $l$ -мерная координатная плоскость  $(0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_n)$  касается  $\mathcal{T}^{(s)}$  в точке  $O$ . Тогда  $\Gamma^{(u)}$  может быть задана с помощью  $l$   $C^{r-1}$ -функций:

$$u_{k+1} = f_1(u_1, \dots, u_k),$$

$$u_{k+2} = f_2(u_1, \dots, u_k), \dots, u_n = f_l(u_1, \dots, u_k),$$

в то время как  $\Gamma^{(s)}$  может быть задана с помощью  $k$   $C^{r-1}$ -функций:

$$u_1 = g_1(u_{k+1}, \dots, u_n),$$

$$u_2 = g_2(u_{k+1}, \dots, u_n), \dots, u_k = g_k(u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Доказательство этой теоремы может быть найдено во многих учебниках (см., например, [1] — [3]) и здесь обсуждаться не будет.  $\Gamma^{(s)}$  и  $\Gamma^{(u)}$  называются устойчивым и неустойчивым многообразиями точки  $O$ .

Следуя Пуанкаре, введем следующие определения.

**Определение 2.** Точка  $A \in M$  называется гомоклинической, если  $A \in \Gamma^{(s)}(O) \cap \Gamma^{(u)}(O)$ .

Предположим теперь, что  $O$  есть гиперболическая периодическая точка  $T$  периода  $p$ ,  $T^r O = O^{(r)}$ ,  $1 \leq r \leq p$ ,  $O = O^{(0)} = O^{(p)}$ . Тогда каждая точка  $O^{(r)}$  есть гиперболическая неподвижная точка  $T^p$ . По теореме Адамара — Перрона она

имеет устойчивое и неустойчивое многообразия  $\Gamma^{(s)}(O^{(r)})$ ,  $\Gamma^{(u)}(O^{(r)})$ . Ясно, что  $\Gamma^{(s)}(O^{(r_1)}) = T^{(r_1-r_2)}\Gamma^{(s)}(O^{(r_2)})$ ,  $\Gamma^{(u)}(O^{(r_1)}) = T^{(r_1-r_2)}\Gamma^{(u)}(O^{(r_2)})$ .

**Определение 2'.** Точка  $A$  называется гетероклинической, если  $A \in \Gamma^{(s)}(O^{(r_1)}) \cap \Gamma^{(u)}(O^{(r_2)})$  при некоторых  $r_1, r_2$ .

Роль гомоклинических и гетероклинических точек для образования так называемых стохастических слоев будет объяснена в следующей лекции. Мы увидим при этом, что решающую роль играет то обстоятельство, что в точке  $A$  многообразия  $\Gamma^{(s)}(O^{(r_1)})$  и  $\Gamma^{(u)}(O^{(r_2)})$  пересекаются трансверсально, т. е. пересечение касательных пространств к  $\Gamma^{(s)}(O^{(r_1)})$  и  $\Gamma^{(u)}(O^{(r_2)})$  в точке  $A$  состоит только из нуля. Тем самым мы приходим к важной проблеме проверки выполнения этого условия трансверсальности. Существует широкий класс динамических систем, зависящих от параметра, где угол между касательными плоскостями выражается в виде степенного ряда от параметров с помощью так называемого метода

Мельникова [4]. Этот метод описан подробно в книге Арнольда [5], и мы не будем его здесь обсуждать. Существует, однако, и другой класс систем, где этот метод не применим, поскольку угол как функция параметров имеет существенную особенность. Вернемся в этой связи к отображению Чирикова (2) и рассмотрим гиперболическую неподвижную точку  $O = (0, 0)$ . Здесь  $k = l = 1$  и  $\Gamma^{(s)}(O)$ ,  $\Gamma^{(u)}(O)$  — кривые, которые близки к соответствующим сепаратрисам при малых  $\lambda$  (рис. 14.3). Кривая

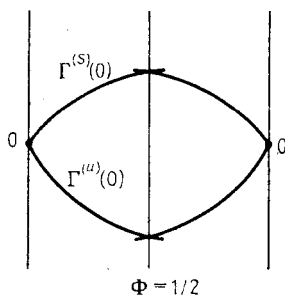


Рис. 14.3

$\Gamma^{(s)}(O)$  переходит в  $\Gamma^{(u)}(O)$  при симметрии  $(Z, \Phi) \mapsto (Z, 1 - \Phi)$ . По этой причине, естественно, исследовать гомоклиническую точку  $A$ , лежащую на вертикальной прямой  $\Phi = 1/2$ . Мы докажем следующую теорему.

**Теорема 2\*.** Пусть  $\alpha$  — угол между  $\Gamma^{(s)}(O)$  и  $\Gamma^{(u)}(O)$  в точке  $A$ . Тогда  $|\alpha| \leq \exp\{-\text{const} \cdot \psi(\sqrt{\lambda})\}$ , где  $\psi(t)$  — обратная функция к функции  $t = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

Исторические замечания, касающиеся этой теоремы, приводятся в конце лекции.

\* ) Может быть пропущена при первом чтении.

Доказательство. Вначале мы обобщим ситуацию и возьмем периодическую функцию  $V$  периода 1 такую, что

$$1) \quad V(x) = V(-x);$$

2)  $V$  допускает аналитическое продолжение в полосу  $O_\rho = \{x \mid |\operatorname{Im} x| \leq \rho\}$  при некотором  $\rho > 1$ .

3)  $V$  имеет единственный невырожденный максимум при  $x=0$  и единственный невырожденный минимум при  $x = \pm 1/2$  на отрезке  $-1/2 \leq x \leq 1/2$ . Типичным примером служит функция  $V(x) = \cos 2\pi x$ . Введем отображение с перекручиванием  $T$  цилиндра  $C$ , где  $T(z, \varphi) = (z', \varphi')$ ,  $z' = z + \gamma V'(\varphi)$ ,  $\varphi' = \varphi + \gamma z' \pmod{1}$ . Траектории  $T$  соответствуют нелинейному разностному уравнению второго порядка

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \gamma^2 V'(x_n), \quad (5)$$

если положить  $z_n = \gamma^{-1}(x_n - x_{n-1})$ ,  $\varphi_n = \{x_n\}$ . Точки, лежащие на устойчивом (неустойчивом) многообразии точки  $(0, 0)$ , соответствуют решениям, для которых  $x_n \rightarrow 1/2$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $x_n \rightarrow -1/2$  при  $n \rightarrow -\infty$ ). Если  $\{x_n\}$  есть решение (5), для которого  $x_n \rightarrow 1/2$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ввиду симметрии 1)  $-\{x_{-n}\} = \{x'_n\}$  есть решение (5), для которого  $x'_n \rightarrow -1/2$  при  $n \rightarrow -\infty$ . Если  $x^+ = \{x_n^+\}^\infty_\infty$  есть решение (5), для которого  $x_0^+ = 0$ ,  $x_n^+ \rightarrow 1/2$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для решения  $x^- = \{x_n^-\}^\infty_\infty$ ,  $x_n^- = -x_n^+$  мы имеем  $x_0^- = 0$ ,  $x_n^- \rightarrow -1/2$  при  $n \rightarrow -\infty$ .

Положим  $Y_n^+ = \gamma^{-1}(x_n^+ - x_{n-1}^+)$ ,  $Y_n^- = \gamma^{-1}(x_n^- - x_{n-1}^-)$  и покажем, что  $Y_0^+ = Y_0^-$ , или, что эквивалентно,  $x_1^+ + x_{-1}^+ = 0$ . Из (5) и из того, что  $V'(0) = 0$ , следует  $x_1^+ - 2x_0^+ + x_{-1}^+ = x_1^- + x_{-1}^- = 0$ , т. е.  $Y_0^+ = Y_0^-$ . Это означает, что точка  $B = (Y_0, 0) \in C$ ,  $Y_0 = y_0^+ = y_0^-$ , принадлежит  $\Gamma^{(s)}(0)$  и  $\Gamma^{(u)}(0)$ , т. е. является гомоклинической точкой.

Обозначим  $\bar{x}_n$  решение (5), для которого  $\bar{x}_n \rightarrow 1/2$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\bar{x}_n \rightarrow -1/2$  при  $n \rightarrow -\infty$ . Линеаризуем (5) вдоль решения  $\{\bar{x}_n\}$ . Для этого возьмем  $x_n = \bar{x}_n + \varepsilon u_n$  и удержим члены первого порядка по  $\varepsilon$ . Мы получим разностное уравнение Шредингера

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \gamma^2 V''(\bar{x}_n) u_n. \quad (6)$$

Потенциал  $-V''(\bar{x}_n) \rightarrow -V''(1/2)$  при  $n \rightarrow \pm \infty$ . Введем решения  $u_n^\pm$  уравнения (6), которые стремятся к 0 при  $n \rightarrow \pm \infty$ . Легко видеть, что касательная прямая к  $\Gamma^{(s)}$  ( $\Gamma^{(u)}$ ) в точке  $B$  порождается векторами

$$e^+ = (u_0^+, \gamma^{-1}(u_0^+ - u_{-1}^+)) \quad (e^- = (u_0^-, \gamma^{-1}(u_0^- - u_{-1}^-)).$$

Тем самым наша задача сводится к оценке угла между  $e^+$  и  $e^-$ . Для того чтобы это сделать, мы построим последовательность  $\{v_n\}^\infty_\infty$ ,  $v_0 = 1$ ,  $v_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \pm \infty$ , для которой мы покажем, что для решений  $u_n^+$ ,  $u_n^-$ ,  $u_0^+ = u_0^- = 1$  будет

выполнено неравенство  $|u_1^+ - v_1| \leq \delta(\gamma)$ ,  $|u_1^- - v_1| \leq \delta(\gamma)$ , где  $\delta(\gamma) = \exp\{-\text{const} \cdot \psi(\gamma)\}$ . Это дает нужную оценку  $|\alpha|$ .

Для построения  $v_n$  вернемся к (5) и заменим его уравнением

$$x((t+1)\gamma) - 2x(t\gamma) + x((t-1)\gamma) = \gamma^2 V'(x(t\gamma)). \quad (7)$$

Допустим временно, что  $t$  может принимать все вещественные значения,  $-\infty < t < \infty$ . Мы попытаемся решить (7) с помощью формальной теории возмущений. Положим  $x(t) = x_0(t) + \gamma x_1(t) + \dots + \gamma^{2m} x_{2m}(t) + \dots$  и запишем левую часть

(7) в виде  $2 \sum \frac{\gamma^{2m}}{(2m)!} x^{(2m)}(t)$ . Тогда формально мы получим

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2m}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} [x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \dots] = \\ = \gamma^2 \left[ V'(x_0) + \frac{V''(x_0)}{1!} (\gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \dots) + \frac{V'''(x_0)}{2!} (\gamma x_1 + \right. \\ \left. + \gamma^2 x_2 + \dots)^2 + \dots \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Это дает последовательную систему уравнений для нахождения  $x_n$ :

$$x_0''(t) = V'(x_0(t)), \quad (9.0)$$

$$x_1''(t) = V''(x_0(t))x_1(t), \quad (9.1)$$

$$x_2''(t) = V''(x_0(t))x_2(t) = -x_0''(t), \quad (9.2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n''(t) = V''(x_0(t))x_n(t) = F_n(t). \quad (9.n)$$

Здесь  $F_n$  — многочлен от  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ,  $V^{(i)}(x_0)$  и их производных.

Рассмотрим (9.1), (9.2), ..., (9.n) более подробно. Левая часть имеет вид  $DY_n$ , где  $D = \frac{d^2}{dt^2} - V''(x_0(t))$  есть одномерный оператор Штурма — Лиувилля с потенциалом  $-V''(x_0(t))$ . Здесь  $x_0(t)$  есть решение (9.0), для которого  $x_0(t) \rightarrow 1/2$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $x_0(t) \rightarrow -1/2$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Обозначим через  $H$  гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций по отношению к мере Лебега на прямой. Тогда  $D$  есть самосопряженный оператор в  $H$ . Как следует из общей теории рассеяния (см. [4]),  $H = H_0 \oplus H_1$ , где  $H_0$  инвариантно относительно  $D$ , изоморфно  $H$  и при этом изоморфизме  $D$  переходит в оператор умножения на функцию  $-k^2 - V''(1/2)$ , в то время как  $H_1$  конечномерно и  $DH_1 = H_1$ . Это означает, что  $H_1$  порождается собственными векторами  $D$ .

В нашем случае  $H_1$  нетривиально, поскольку  $D$  имеет собственную функцию  $x'_0(t)$ , отвечающую собственному значению  $\lambda=0$ . Легко показать, что других собственных функций с тем же собственным значением нет. Поэтому для того, чтобы уравнения (9.н),  $n=1, 2, \dots$ , могли иметь решение, необходимо, чтобы все  $F_n$  были бы ортогональны к  $x'_0$ , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_n x'_0 dt = 0. \quad (10)$$

Покажем, что (10) действительно имеет место. Функция  $x_0(t)$  нечетна, и поэтому  $x'_0(t)$  четна. Из (8) легко следует, что (9.н) имеет нулевое решение при нечетных  $n$ , и поэтому для таких  $n$  соотношение (10) справедливо. Напишем теперь  $F_n = \Sigma_1 - \Sigma_2$ , где

$$\Sigma_1 = \sum_{l=2}^n \frac{1}{l!} V^{(l+1)}(x_0) X_l, \quad (11)$$

$$X_l = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_l = n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n-1}} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_l}, \quad (12)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{l=2}^n \frac{2}{(2l)!} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} x_{n-2l}. \quad (13)$$

Сделаем индуктивное предположение, состоящее в том, что все  $x_m$  являются нечетными функциями,  $l \leq m \leq n$ . Тогда  $V(x_0(t))$  есть четная функция  $t$ , а  $\Sigma_2$  есть нечетная функция. Функция  $X_l$  в (12) имеет ту же четность, что и  $l$ , в то время как  $V^{(l+1)}(x_0)$  имеет противоположную четность. Поэтому  $V^{(l+1)}(x_0) X_l$  будет при всех  $l$  нечетной функцией, и тем самым  $F_n$  также будет нечетной функцией. Обозначим через  $H_2$  пространство функций, ортогональных к  $x'_0$ . Мы показали, что  $F_n \in H_2$ , и поэтому мы можем взять  $x_n = D^{-1} F_n \in H_2$ . Из того, что  $V''(x_0)$  четна, легко следует, что  $x_n$  нечетна. Включение  $F_n \in H$  будет следовать из дальнейших оценок.

**Лемма 1.** *Решение (9.0), для которого  $x_0(t) \rightarrow -1/2$  при  $t \rightarrow -\infty$ ,  $x_0(t) \rightarrow 1/2$  при  $t \rightarrow \infty$ , может быть аналитически продолжено в полосу  $O_{h_0} = \{t \mid |\operatorname{Im} t| < h_0\}$  при некотором  $h_0 > 0$  и удовлетворяет оценке  $|x_0(t) + 1/2| \leq C \exp\{-\lambda_0 |\operatorname{Re} t|\}$  при  $\operatorname{Re} t \leq 0$ ,  $|x_0(t) - 1/2| \leq C \exp\{-\lambda_0 |\operatorname{Re} t|\}$  при  $\operatorname{Re} t \geq 0$ . Здесь  $\lambda_0 > 0$ ,  $C > 0$  — некоторые постоянные.*

Доказательство леммы вытекает непосредственно из аналитических формул, задающих  $x_0(t)$ , и более подробно проводиться не будет. Положим  $A = \sqrt{V''(1/2)} > 0$  и возьмем  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \min(\lambda_0, A)$ . Введем пространство  $\Phi_{h,\lambda}$  функций  $w(t)$ ,

которые аналитичны в полосе  $O_h = \{t \mid |\operatorname{Im} t| < h\}$  и удовлетворяют неравенству

$$|w(t)| < C \exp \{-\lambda |\operatorname{Re} t|\} \quad (14)$$

при некотором  $C$ . Нижняя грань  $C$  может рассматриваться как норма в  $\Phi_{h,\lambda}$ .

**Лемма 2.** *Существует  $K = K(h, \lambda) > 0$  такое, что для  $F \in \Phi_{h,\lambda} \cap H_2$  образ  $D^{-1}F \in \Phi_{h,\lambda} \cap H_2$  и  $\|D^{-1}F\| \leq K \cdot \|F\|$ .*

Доказательство леммы приводится в конце этой лекции. Используя лемму, покажем теперь, что если  $n(\gamma)$  есть

обратная функция к  $\gamma = \frac{1}{n \ln^2 n}$ , то тогда  $z_n(t) = x_0(t) + \gamma^2 x_2(t) + \dots + \gamma^{2n} x_{2n}(t)$  удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(t) = |z_n((t+1)\gamma) - 2z_n(t\gamma) + z_{n-1}((t-1)\gamma) - \gamma^2 V'(z_n(t\gamma))| \leq \\ \leq \exp \{-\operatorname{const} \cdot \psi(\gamma) - \lambda |\operatorname{Re} t|\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы выведем утверждение теоремы из (15).

Оценим вначале  $x_n(t)$ . Покажем, что  $x_n(t)$  аналитичны в полосе  $O_h = \{t \mid |\operatorname{Im} t| < h\}$  и удовлетворяют неравенствам

$$|x_n(t)| \leq \varphi_n(|t|), \quad (16)$$

где  $\varphi_n(t) = c^{2n-1} n^n [\ln n]^{2n} \exp \{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}$ ,  $\lambda$  фигурирует в лемме 2,  $c > 1$  будет выбрано позже и  $\ln x = \max(\ln x, 1)$ .

Доказательство (16) проводится по индукции. Предположим, что при  $m < n$  функции  $x_m$  аналитичны в полосе  $O_{h_m}$ ,

$$h_m = h_0 - \sum_{s=1}^m v_s, \quad v_s = c_1 s^{-1} \ln^{-3/2} s,$$

$$c_1 = \frac{1}{2} h_0 \left( \sum_{s=2}^{\infty} s^{-1} \ln^{-3/2} s \right)^{-1},$$

и удовлетворяют в  $O_{h_m}$  неравенствам  $|x_m(t)| < \varphi_m(t)$ . В качестве  $h_0$  можно взять любое число, меньшее, чем  $\rho$ . Более точный выбор будет сделан позже.

Докажем теперь (16) для  $x_n$  в полосе  $O_{h_n}$ . При  $n=1$  это легко следует из леммы 1. Функция  $x_n$  есть решение уравнения

$$x_n - V''(x_0)x_n = F_n,$$

где  $F_n$  находится в (11)–(13). Ввиду леммы 2 достаточно показать, что для  $t \in O_{h_n}$

$$|F_n(t)| \leq K^{-1} \varphi_n(|t|), \quad K = K(h_n, \lambda). \quad (17)$$

Оценим отдельно  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  (см. (11), (13)).

Выберем  $h_0$  таким образом, чтобы множество значений  $x_0(t)$ ,  $t \in O_{h_0}$ , лежало бы внутри  $O_{(p-1)/2}$ . Для любой точки  $z \in O_{h_0}$ ,  $z = y_0(t)$ , построим контур  $\Gamma_z = \Gamma$ , принадлежащий области аналитичности  $V$  и  $\inf_{\xi \in \Gamma} |\xi - z| \geq 1$ . Мы имеем

$$\left| \frac{1}{l!} V^{(l+1)}(z) \right| = \frac{(l+1)}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{V(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{l+2}} \right| \leq C_2 l,$$

$C_2$  — некоторая постоянная. Теперь мы можем оценить  $\Sigma_1$ :

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leq C_2 \sum_{l=2}^n l |x_l| = C_2 \sum_{l=2}^3 l |x_l| + C_2 \sum_{l \geq 4} l |x_l| \leq \\ &\leq 5C_2 \max(|x_2|, |x_3|) + C_2 n^2 \max_{4 \leq l \leq n} |x_l|. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\max(|x_2|, |x_3|) \leq \frac{1}{20KC_2 n^2} \varphi_n(|t|), \quad (18)$$

$$\max_{l \geq 4} |x_l| \leq \frac{1}{4KC_2 n^2} \varphi_n(|t|). \quad (19)$$

Неравенства (18), (19) дают  $|\Sigma_1| \leq \frac{1}{2K} \varphi_n(|t|)$ .

Докажем вначале (19). Имеем

$$|X_l| \leq \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_l = n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n-1}} |x_{j_1}| \dots |x_{j_l}|. \quad (20)$$

На основании индуктивного предположения

$$\begin{aligned} |x_{j_1}| \dots |x_{j_l}| &\leq \\ &\leq C^{2n-1} (j_1)^{j_1} \dots (j_l)^{j_l} (\ln j_1)^{2j_1} \dots (\ln j_l)^{2j_l} \exp \{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Допустим, что  $\varphi(x)$  есть либо  $x^x$ , либо  $(\ln x)^{2x}$ . Тогда

$$\varphi(u) \cdot \varphi(v) < \varphi(u+1) \varphi(v-1).$$

Из последнего неравенства следует, что максимальное слагаемое в (20) отвечает  $j_{s_0} = n - l + 1$ ,  $j_s = 1$  для  $s \neq s_0$ . Общее число таких слагаемых не превосходит  $n$ . Следующие по величине слагаемые отвечают  $\max_s j_s = n - l$ . Их число не превосходит  $n^2$ .

Для следующих после них слагаемых  $\max_s j_s = n - l - 1$ . Их число не превосходит  $n^3$ . Общее число остальных слагаемых не



превосходит  $n^l$ . Теперь мы имеем

$$|X_l| \leq \{(n-l+1)^{n-l+1} (\ln(n-l+1))^{2(n-l+1)} n + \\ + (n-l)^{n-l} (\ln(n-l))^{2(n-l)} 2 (\ln^2 2) n^2 + \\ + (n-l-1)^{n-l-1} (\ln(n-l-1))^{2(n-l-1)} 3 (\ln^2 3) n^3 + \\ + (n-l-2)^{n-l-2} (\ln(n-l-2))^{2(n-l-2)} \times \\ \times 4 (\ln^2 4) n^l\} C^{2n-1} \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}. \quad (22)$$

В нашем случае  $n-l+1 \leq n-3$ , поскольку  $l \geq 4$ , и тем самым  $(n-l+1)^{n-l+1} \leq (n-3)^{n-3} = n^n \cdot n^{-3} (l+3(n-3)^{-l})^{-(n-3)} \leq \frac{1}{2n^3} \cdot n^n$ . Аналогичным образом,  $(n-l)^{n-l} \leq 2^{-l} n^{n-4}$ ,  $(n-l-1)^{n-l-1} \leq 2^{-l} n^{n-5}$ . Мы используем эти неравенства для оценки первых трех членов в (22), а для последнего слагаемого используем неравенство  $(n-l-2)^{n-l-2} n^l \leq n^{n-2}$ . Это дает

$$\max_{l \geq 4} |x_l| \leq \text{const} \cdot C^{-l+1} \cdot C^{2n-l} (\ln n)^{2n} \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}.$$

Взяв  $C$  достаточно большим, мы получим (19). Доказательство (18) проще ввиду неравенства

$$|x_1| \leq \{(n-l+1)^{n-l-1} [\ln(n-l-1)]^{2(n-l+1)} n + \\ + (n-l)^{n-l} \cdot 2 (\ln^2 2) n^l\} \cdot C^{2n-l} \cdot \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}.$$

Тем самым мы оценили  $\Sigma_1$ .

Слагаемое в  $\Sigma_2$  имеет вид

$$s_l(t) = \frac{1}{(2l)!} x_{n-2l}^{(2l)}, \quad l=2, \dots, n.$$

Пусть  $t \in O_{h_n}$  и  $\Gamma$  есть окружность с центром в  $t$ , имеющая радиус  $v_n$ . Тогда  $\Gamma$  лежит в области аналитичности  $x_{n-2l}$ , и поэтому

$$s_l(t) = \frac{2l+1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{x_{n-2l}(\xi)}{(\xi-t)^{2l+1}} d\xi.$$

Используя индуктивное предположение  $|x_{n-2l}| \leq \Phi_{n-2l}$ , мы имеем

$$|s_l(t)| \leq \frac{1}{2\pi} C^{2(n-2l)-1} (n-2l)^{n-2l} [\ln(n-2l)]^{2(n-2l)} \times \\ \times C_1^{-(2l+1)} n^{2l+1} (\ln n)^{3/2(2l+1)} 2\pi C_1 n^{-1} \ln^{-3/2} n \times \\ \times \exp\{-\lambda (|\operatorname{Re} t| - 1)\}.$$

Если выбрать  $C$  достаточно большим, то

$$|s_l(t)| \leq C^{2n-l} (n-2l)^{n-2l} n^{2l} (\ln(n-2l))^{2(n-2l)} \times \\ \times (\ln n)^{3l} \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}.$$

Таким образом, получаем

$$|\sum_2| \leq \sum_{l=2}^n |s_l(t)| = \sum_{l=2}^{[\ln n]} |s_l(t)| + \sum_{l=[\ln n]+1}^n |s_l(t)|.$$

В первой сумме число слагаемых не превосходит  $\ln n$ . Это дает

$$\sum_{l=2}^{[\ln n]} |s_l(t)| \leq \ln^2 n C^{2n-2} n^n (\ln n)^{2n} \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}.$$

Для второй суммы можем написать

$$\sum_{l=[\ln n]+1}^n |s_l(t)| \leq \frac{n^2}{n^{2 \ln C}} C^{2n-l} n^n (\ln n)^{2n} \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}.$$

Взяв  $C$  достаточно большим, получим окончательно  $|\sum_2| \leq (2K)^{-1} \varphi_n(t)$ , что дает (17). Тем самым (16) доказано. Меняя  $C$ , если необходимо, мы можем переписать искомое неравенство в виде

$$|x_n(t)| \leq C^n n^n (\ln n)^{2n} \exp\{-\lambda |\operatorname{Re} t|\}, \quad n > 1.$$

Оценка (16) используется для оценки погрешности

$$\varepsilon_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma^k [x_k(t+\gamma) - 2x_k(t) + x_k(t-\gamma)] - \\ - \gamma^2 V'(x_0(t) + \gamma^2 x_2(t) + \dots + \gamma^n x_n(t)), \quad n=2m.$$

Запишем  $\varepsilon_n(t)$  в виде  $\varepsilon_n(t) = s_1 + s_2 - s_3 - s_4$ , где

$$s_1 = 2 \sum_{i=1}^m \frac{\gamma^{2i}}{(2i)!} \frac{d^{2i}}{dt^{2i}} (x_0 + \Delta_n), \\ s_2 = \frac{\gamma^{n+2}}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} (x_0 + \Delta_n) \Big|_{t+\theta_i \gamma}, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \\ s_3 = \gamma^2 \sum_{l=0}^n \frac{V^{(l+1)}(x_0)}{l!} (\Delta_n)^l, \\ s_4 = \gamma^2 \frac{V^{(n+2)}(x_0 + \theta \Delta_n)}{(n+1)!} \Delta_n^{n+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

$\Delta_n = \gamma^2 x_2 + \dots + \gamma^n x_n$ . Вспомогая определение  $x_k$ , мы видим, что все члены, содержащие множитель  $\gamma^p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , сокращаются. Таким образом, мы должны оценить только члены, степень которых превосходит  $n$ . Обозначим сумму таких членов в  $s_i$  через  $\bar{s}_i$ . Имеем

$$\bar{s}_1 = \sum_{r=n+2}^{2n} 2\gamma^r \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} x_{r-2k}.$$

Возьмем контур  $\Gamma \subset O_h$  такой, что  $t$  лежит внутри  $\Gamma$ , длина  $\Gamma$  не меньше чем  $\text{const}$  и  $\inf_{\xi \in \Gamma} |\xi - t| \geq \text{const}$ . Из формулы Коши и оценки (16) следует оценка

$$|\bar{s}_1| \leq \gamma^n (\text{const})^n n^{n+2} (\ln n)^{2n} \exp \{-\lambda |\text{Re } t|\}.$$

Таким же образом оцениваем  $\bar{s}_2$ :

$$|\bar{s}_2| \leq \gamma^n (\text{const})^n n^{n+1} (\ln n)^{2n} \exp \{-\lambda |\text{Re } t|\}.$$

Далее,  $|\bar{s}_3| \leq n^3 \max_{\substack{1 \leq s \leq n^2 \\ n \leq r \leq n}} |\beta_s^{(r)}|$ , где

$$\beta_s^{(r)} = \frac{V^{(s+1)}(x_0)}{s!} \gamma^r \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_s = r-2 \\ 1 \leq j_i \leq n}} x_{j_1} \dots x_{j_s}.$$

Из неравенства Коши  $\left| \frac{V^{(s+1)}(x_0)}{s!} \right| \leq \text{const} \cdot n$ , и поэтому

$$|\beta_s^{(r)}| \leq \text{const} \cdot n \gamma^2 \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_s = r-2 \\ 1 \leq j_i \leq n}} |x_{j_1}| \dots |x_{j_s}|.$$

Пусть  $qn \leq r-2 \leq (q+11)n$ . Наибольшему слагаемому в последней сумме отвечает набор  $(j_1, \dots, j_s)$ , у которого

$$j_1 = j_2 = \dots = j_q = n, \quad j_{q+1} = \dots = j_{s-1} = 1, \quad j_s = v$$

и  $v$  находится из соотношения  $j_1 + \dots + j_s = r-2$  или его перестановки. Тогда такие же аргументы, что и выше, показывают, что

$$|x_{j_1} \dots x_{j_s}| \leq (\gamma \text{const} \cdot n \ln^2 n)^{nq} (\gamma \cdot \text{const}) (\gamma \cdot \text{const} \cdot \ln^2 v)^v \exp \{-\lambda |\text{Re } t|\}.$$

Допустим теперь, что  $n$  удовлетворяет неравенствам

$$\text{const} \cdot \gamma \cdot n \ln^2 n \leq 1.$$

На самом деле необходимо рассматривать только  $n \leq n(\gamma)$ . Тогда

$$|\beta_s^{(r)}| \leq \text{const} \cdot \gamma^n \cdot (\text{const})^n \ln^2 n \exp(\text{const} \cdot n) \exp(-\lambda \text{Re } t)$$

и

$$|\bar{s}_3| \leq \text{const} \cdot n^4 (\gamma \text{const} \cdot \ln^2 n)^n \exp\{-\lambda |\text{Re } t|\}.$$

Таким же образом мы оцениваем  $\bar{s}_4$  и получаем

$$|\varepsilon_n(t)| \leq (\gamma \text{const} \cdot n \ln^2 n)^n \exp\{-\lambda |\text{Re } t|\}.$$

Для  $n = n(\gamma)$

$$|\varepsilon_n(t)| \leq \exp\{-\text{const} \psi(\gamma)\} \cdot \exp\{-\lambda |\text{Re } t|\}. \quad (23)$$

Теперь окончим доказательство теоремы 2. Для достаточно малых  $\tilde{\gamma}_4$  положим

$$z(t) = z_\gamma(t) = x_0(t) + \gamma^2 x_2(t) + \dots + \gamma^n x_n(t), \quad n = n(\gamma).$$

Тогда  $z(t)$  удовлетворяет уравнению

$$z((t+1)\gamma) - 2z(t\gamma) + z((t-1)\gamma) = \gamma^2 V'(z(t\gamma)) + \varepsilon(t),$$

где для  $\varepsilon(t)$  выполнено (23). Обозначим  $z_n = z(n\gamma)$ ,  $\varepsilon_n = \varepsilon(n\gamma)$ . Имеем

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = \gamma^2 V'(z_n) + \varepsilon_n,$$

$|\varepsilon_n| < \exp\{-\psi(\gamma) - \lambda n\gamma\}$ . Положим  $v(t) = z'(t)$ . Тогда

$$v((t+1)\gamma) - 2v(t\gamma) + v((t-1)\gamma) = \gamma^2 V''(z(t\gamma))v(t\gamma) + \delta(t),$$

где  $\delta(t) = \varepsilon'(t)$  и в полосе  $O_{h/2}$

$$|\delta(t)| \leq \text{const} \cdot \exp\{-\psi(\gamma) - \lambda |\text{Re } t|\}.$$

Обозначим  $v_n = v(n\gamma)$ . Покажем, что  $v_n$  есть требуемая последовательность. Прежде всего:

$$v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1} = \gamma^2 V''(z_n)v_n + \delta_n, \quad (24)$$

$\delta_n = \delta(n\gamma)$ ,  $|\delta_n| \leq \text{const} \cdot \exp\{-\text{const} \cdot \psi(\gamma) - \lambda n\gamma\}$ . Сравним  $v_n$  с решениями  $u_n^+$ ,  $u_n^-$ , построенными ранее. Ограничимся  $v_n$  и  $u_n^-$  при  $n \leq 1$ . Для последовательности  $u_n^-$

$$u_{n+1}^- - 2u_n^- + u_{n-1}^- = \gamma^2 V''(\bar{x}_n)u_n^- \quad (25)$$

и  $u_n^- \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow -\infty$ , в то время как для  $\bar{x}_n$  мы имеем

$$\bar{x}_{n+1} - 2\bar{x}_n + \bar{x}_{n-1} = \gamma^2 V''(\bar{x}_n),$$

$\bar{x}_n \rightarrow -1/2$  при  $n \rightarrow -\infty$ ,  $\bar{x}_n \rightarrow 1/2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Уравнения (24), (25) отличаются слагаемым  $\delta_n$ , и в (24) стоит  $\gamma^2 V''(z_n)$ , в то время как в (25) стоит  $\gamma^2 V''(\bar{x}_n)$ . Для  $d = z_n - \bar{x}_n$  можем написать

$$d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1} = \gamma^2 v(\xi_n)d_n + \varepsilon_n,$$

где  $\xi_n \in O_{n/2}$ , и поэтому  $|V''(\xi_n)| \leq \text{const}$ . Решение последнего уравнения можно записать в виде

$$d_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n-m) \varepsilon_m,$$

где  $G$  есть функция Грина. Воспользуемся теперь следующей хорошо известной оценкой:

$$|G(n, m)| \leq C \exp \{-\gamma \text{const} \cdot |m-n|\}.$$

Тем самым мы получаем

$$\begin{aligned} |d_n| &\leq \text{const} \cdot \left[ \sum_{\substack{|m| \leq \frac{\text{const}}{\lambda \gamma^2}}} \exp \{-\gamma \text{const} \cdot |n-m|\} |\varepsilon_m| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{|m| > \frac{\text{const}}{\lambda \gamma^2}}} \exp \{-\gamma \text{const} \cdot |n-m|\} |\varepsilon_m| \leq \right. \\ &\quad \left. \leq \frac{\text{const}}{\lambda \gamma^2} \exp \{-\psi(\gamma) - \text{const} \cdot n \gamma\}. \right. \end{aligned}$$

Для  $d_n$  это дает следующую оценку:

$$|d_n| \leq \exp \{-\text{const} \cdot \psi(\gamma) - \text{const} \cdot |n| \gamma\}.$$

Положим  $\Delta_n = u_n^- - v_n$ . Выберем нормировку  $v_n^-$  таким образом, чтобы  $u_0 = v_0$ , т. е.  $\Delta_0 = 0$ . Для  $\Delta_n$  мы имеем систему уравнений

$$\Delta_{n+1} - 2\Delta_n + \Delta_{n-1} = \gamma^2 V''(\bar{x}_n) \Delta_n + \delta_n + \gamma^2 [V''(\bar{x}_n) - V''(z_n)] v_n.$$

Оценка  $d_n$  дает

$$\begin{aligned} |\gamma^2 [V''(\bar{x}_n) - V''(z_n)] v_n| &\leq \gamma^2 |V'''(\xi_n)| |\bar{y}_n - z_n| |v_n| \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \exp \{-\text{const} \cdot \psi(\gamma) - \text{const} \cdot |n| \gamma\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что уравнения для  $\Delta_n$  и  $d_n$  вполне аналогичны друг другу, и такие же аргументы показывают, что

$$|\Delta_n| \leq \text{const} \cdot \exp \{-\text{const} \cdot \psi(\gamma) - \text{const} \cdot |n| \gamma\}.$$

В частности,  $|\Delta_1| \leq \text{const} \cdot \exp \{-\text{const} \cdot \psi(\gamma)\}$ , что и требовалось получить.

Остаток этой лекции посвящен доказательству леммы 2. Мы рассматриваем одномерное уравнение Шредингера

$$-\psi'' + (A + W(x))\psi = f, \quad A = \text{const} > 0. \quad (26)$$

Предположим, что  $W(x)$  можно продолжить аналитически в полосу  $O_p$  таким образом, что будет выполнено неравенство

$$|W(x)| \leq C \exp \{-\lambda |\operatorname{Re} x|\}. \quad (27)$$

Здесь  $\lambda > 0$  — постоянная,  $\lambda < \sqrt{A}$ , и нижняя грань  $C$ , при которых выполнено (27), может рассматриваться как некоторая норма  $\|W\|$ . Пространство функций, для которых  $\|\cdot\| < \infty$ , обозначим  $\Phi_{p,\lambda}$ . Возьмем  $\psi_0 \in \Phi_{p,\lambda'}$ , для которой

$$-\psi_0'' + (A + W)\psi_0 = 0.$$

Мы хотим показать, что если  $f \in \Phi_{p,\lambda}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f \psi_0 dx = 0$ , то решение (26) существует и  $\psi \in \Phi_{p,\lambda}$ . Более того, при некоторой постоянной  $K$

$$\|\psi\| \leq K \|f\|.$$

Пусть  $G_0(x-y) = \exp \{-\sqrt{A}|x-y|\}$  — функция Грина оператора  $L\psi = -\psi'' + A\psi$ . Тогда (26) эквивалентно уравнению

$$\psi + \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-y) W(y) \psi(y) dy = f_1, \quad (28)$$

где

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(y) f(x-y) dy.$$

Покажем, что  $f_1 \in \Phi_{p,\lambda}$  и, в частности,  $f$  можно аналитически продолжить в полосу  $O_p$ . Пусть  $x \in O_p$ ,  $\operatorname{Re} x > 0$ . Если  $|f(x)| \leq C \exp \{-\lambda |\operatorname{Re} x|\}$ , то тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} G_0(y) f(x-y) dy \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\operatorname{Re} x} G_0(y) f(x-y) dy \right| + \\ &+ \left| \int_{\operatorname{Re} x}^{\infty} G_0(y) f(x-y) dy \right| \leq \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\operatorname{Re} x} G_0(y) e^{-\lambda(\operatorname{Re} x - y)} dy + C \int_{\operatorname{Re} x}^{\infty} e^{-\sqrt{A}y} dy = \\ &= e^{-\lambda \operatorname{Re} x} C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{A}-\lambda)|y|} dy + \frac{C}{\sqrt{A}} e^{-\sqrt{A} \operatorname{Re} x} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \exp \{-\lambda \operatorname{Re} x\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Таким образом,  $f_1 \in \Phi_{p,\lambda}$ ,  $\|f_1\| \leq \text{const} \cdot \|f\|$ . Для решения (28) используем формулы Фредгольма. Положим  $K(x, y) = G_0(x-y)W(y)$ ,  $(K\psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\psi(y)dy$ . Ядро оператора  $(I - \mu K)^{-1}$  может быть записано в виде  $D(x, y; \mu)D^{-1}(\mu)$ , где  $D(x, y; \mu)$  и  $D(\mu)$  даются формулами Фредгольма

$$D(\mu) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \mu^m \int \dots \int K \begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_m \\ \xi_1 \dots \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_m,$$

$$D(x, y; \mu) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \mu^m \int \dots \int K \begin{pmatrix} x & \xi_1 \dots \xi_m \\ y & \xi_1 \dots \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_m,$$

где  $K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{pmatrix}$  есть определитель матрицы  $\|K(x_i, y_j)\|$ .

В нашем случае  $D(1) = 0$ , поскольку 1 есть собственное значение (28). Однако решение нашей задачи существует в пространстве  $L^2$ . Поэтому  $\int D(x, y; \mu)f_1(y)dy \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Это показывает, что решение, которое мы ищем, может быть записано в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{D'_\mu(1)} \int_{-\infty}^{\infty} D'_\mu(x, y; 1)f_1(y)dy. \quad (30)$$

Покажем вначале, что  $D'_\mu(1)$  конечно. Мы имеем

$$D'_\mu(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int \dots \int K \begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_m \\ \xi_1 \dots \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Из вида  $K$  следует, что

$$K \begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_m \\ \xi_1 \dots \xi_m \end{pmatrix} = W(\xi_1) \dots W(\xi_m) \begin{vmatrix} G_0(0)G_0(\xi_1 - \xi_2) \dots G_0(\xi_1 - \xi_m) \\ G_0(\xi_2 - \xi_1)G_0(0) \dots G_0(\xi_2 - \xi_m) \\ \dots \\ G_0(\xi_m - \xi_1) \dots G_0(0) \end{vmatrix}.$$

Неравенство Адамара показывает, что последний детерминант не превосходит  $m^{m/2}(\text{const})^m$ . Следовательно,

$$\left| \int \dots \int K \begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_m \\ \xi_1 \dots \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_m \right| \leq m^{m/2}(\text{const})^m (\int |W(\xi)|d\xi)^m \quad (31)$$

и ряд для  $D'_\mu(1)$  сходящийся.

Далее,

$$D'_\mu(x, y; 1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int \dots \int K \begin{pmatrix} x & \xi_1 \dots \xi_m \\ y & \xi_1 \dots \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Решение  $\psi$  пропорционально

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int \dots \int f(y) W(y) W(\xi_1) \dots \\ \dots W(\xi_m) G \begin{pmatrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_m \end{pmatrix} dy d\xi_1 \dots d\xi_m,$$

где

$$G = G \begin{pmatrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ y, \xi_1, \dots, \xi_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G_0(x-y) & G_0(x-\xi_1) & \dots & G_0(x-\xi_m) \\ G_0(\xi_m-y) & & & G_0(0) \end{vmatrix}.$$

Удобно положить  $y = \xi_0$ . Тогда

$$G = G_0(x - \xi_0) U_0(\xi_1 \dots \xi_m) + G_0(x - \xi_1) U_1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) + \dots \\ \dots + G_0(x - \xi_m) U_m(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m).$$

Интеграл в (31) можно переписать следующим образом:

$$\int \dots \int f(\xi_0) W(\xi_0) W(\xi_1) \dots W(\xi_m) G \begin{pmatrix} x, \xi_1, \dots, \xi_m \\ \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m \end{pmatrix} d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_m = \\ = \sum_{i=0}^m \int \dots \int f(\xi_0) W(\xi_0) W(\xi_1) \dots \\ \dots W(\xi_m) G_0(x - \xi_i) U_i(\xi_0 \dots \xi_m) d\xi_0 \dots d\xi_m.$$

Произведем замену переменных  $x - \xi_0 = \eta_0$ ,  $x - \xi_1 = \eta_1$ , ...,  $x - \xi_m = \eta_m$ . Функции  $U_i(\xi_0 \dots \xi_m)$  перейдут в  $v_i(\eta_0, \dots, \eta_m)$ , не зависящие от  $x$ , поскольку матричные элементы зависят только от разностей  $\xi_k - \xi_l = \eta_k - \eta_l$ . Поэтому  $i$ -й интеграл равен

$$I = (-1)^m \int \dots \int f(x - \eta_0) W(x - \eta_0) W(x - \eta_1) \dots W(x - \eta_m) \times \\ \times G_0(\eta_1) U_i(\eta_0 \dots \eta_m) d\eta_0 d\eta_1 \dots d\eta_m. \quad (32)$$

Мы можем оценить  $U_i$  опять с помощью неравенств Адамара:  $|U_i(\eta_0 \dots \eta_m)| \leq (\text{const})^m (m+1)^{(m+1)/2}$ . Тем самым, интеграл в (32) сходится. Более того, каждый член может быть аналитически продолжен в  $O_p$ , поскольку  $W(x)$ ,  $f(x) \in \Phi_{p,\lambda}$ . Для оценки (31) напомним при  $i \neq 0$

$$|I| \leq \int \dots \int |f(x - \eta_0) W(x - \eta_0)| \dots |W(x - \eta_1)| \dots \\ \dots |W(x - \eta_i)| |G_0(\eta_i)| |W(x - \eta_{i+1})| \dots \\ \dots |W(x - \eta_m)| |U_i(\eta_0 \dots \eta_m)| d\eta_0 \dots d\eta_m \leq \\ \leq (\text{const})^m (m+1)^{(m+1)/2} C \int_{-\infty}^{\infty} |W(x - \eta_i)| G_0(\eta_i) d\eta_i.$$



Последний интеграл оценивается так же, как (29), и это дает  $\text{const} \cdot \exp \{-\lambda |\text{Re } x|\}$ . При  $i=0$  мы должны оценить  $\int |f_0(x-\eta_0)| W(x-\eta_0) |G_0(\eta_0)| d\eta_0$ , что делается так же, как и выше. Тем самым (31) не превосходит

$$C \exp \{-\lambda |\text{Re } x|\} \cdot \sum \frac{1}{(m-1)!} (m+1)^{(m+3)/2} (\text{const})^{m-1} = \\ = C \exp \{-\lambda |\text{Re } x|\} \cdot K.$$

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Теорема Адамара—Перрона обсуждается во многих книгах и работах, например:

[1] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.—М.—Л.: Гостехиздат, 1949.

[2] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. института им. В. А. Стеклова.—1967.—Т. 90.—С. 1—235.

[3] Hirsch M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds // Lecture Notes in Math. V. 583.—Berlin: Springer, 1977.

2° По поводу метода Мельникова см.

[4] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. Мат. Об-ва.—1963.—Т. 12.—С. 3—52.

[5] Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1974.—432 с.

3° Теорию рассеяния см., например, в книге

[6] Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. V. III. Scattering Theory.—Academic Press, 1979.—464 p. (Русск. пер.: Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния.—М.: Мир, 1982.

4° В работе Филоненко, Сагдеева, Заславского

[7] Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. // Nuclear Fusion.—1967.—V. 7.—P. 253.

На физическом уровне строгости была предложена следующая асимптотическая формула для  $\alpha$ :

$$\alpha \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{\lambda}} \exp \left\{ -\frac{\text{const}}{\sqrt{\lambda}} \right\}.$$

В работе Нейштадта

[8] Нейштадт А. И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // Прикл. мат. и мех.—Т. 48, № 2.—С. 197—204

была получена экспоненциальная оценка

$$|\alpha| \leq \exp \left\{ -\frac{\text{const}}{\sqrt{\lambda}} \right\}.$$

Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит И. П. Корнфельду и мне и ранее не публиковалось. Оно отличается от доказательства Нейштадта. Обнаруженные при этом связи с уравнением Шредингера, возможно, имеют и более общий интерес, и поэтому я решил привести его здесь.

В. Ф. Лазуткин сделал несколько попыток доказать асимптотическую формулу Филоненко — Сагдеева — Заславского, — см. его статью [9] Лазуткин В. Ф. Аналитические интегралы полустандартного отображения и расщепление сепаратрис // Алгебра и Анализ. — 1989. — Т. 1, вып. 2. — С. 116—131. и его более поздние публикации на эту тему.

## ЛЕКЦИЯ 15

### ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ СЛОИ

В этой лекции мы объясняем роль гомоклинических и гетероклинических точек в проблеме появления стохастических свойств динамики. Мы будем иметь дело с одним классом двумерных отображений с перекручиванием, но теорема, которую мы доказываем ниже, справедлива в гораздо более общей обстановке и, в частности, в случае многомерных диффеоморфизмов.

Как и в предыдущей лекции,  $C$  есть двумерный цилиндр, на котором выбраны координаты  $(z, \varphi)$ ,  $V$  — периодическая  $C^\infty$ -функция с периодом 1, имеющая один невырожденный максимум и один невырожденный минимум в точке  $\varphi=0$ , т. е.  $V'(0)=0$ ,  $V''(0)>0$ . Мы рассматриваем отображение  $T$  цилиндра  $C$ , заданное формулой  $T(z, \varphi)=(z', \varphi')$ , где

$$z' = z + V'(\varphi), \quad \varphi' = \varphi + z' \pmod{1}.$$

Стандартное отображение соответствует  $V(\varphi) = 1 - \cos 2\pi\varphi$ .

Как уже было объяснено в предыдущей лекции, точка  $O=(0, 0)$  есть гиперболическая неподвижная точка. Поэтому по теореме Адамара — Перрона (см. также часть V) она имеет

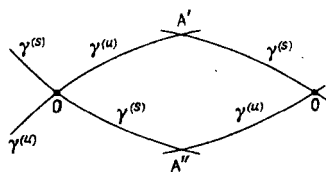


Рис. 15.1

устойчивое и неустойчивое многообразия, которые в данном случае представляют собой одномерные кривые  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$ , выходящие из  $O$  (рис. 15.1). Допустим, что  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  пересекаются в точках  $A'$ ,  $A''$  с координатами  $(z', \varphi')$ ,  $(z'', \varphi'')$ ,  $z'>0$ ,  $z''<0$ , и углы между  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  в точках  $A'$  и  $A''$

отличны от нуля, т. е.  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  пересекаются трансверсально. Мы получаем криволинейный четырехугольник на  $C$ , ограниченный отрезками кривых  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  и имеющий вершины  $O$ ,  $A'$ ,  $A''$ . Точки  $A'$ ,  $A''$  являются гомоклиническими. Обозначим  $U_\varepsilon$   $\varepsilon$ -окрестность  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$ . Мы будем исследовать свойства

множества таких  $(z, \varphi)$ , что  $T^n(z, \varphi) \in U_\varepsilon$  при всех  $n$ ,  $-\infty < n < \infty$ .

Конструкция, которая проводится ниже, требует ряда дополнительных предположений. Читатель легко сможет ее модифицировать для более общих случаев. Кроме того, мы опустим также несколько технических деталей.

Точки  $B' = T^{-1}A'$ ,  $B'' = T^{-1}A''$  также являются гомоклиническими, и  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  пересекаются трансверсально в  $B'$ ,  $B''$  (рис. 15.2). Поскольку  $T$  сохраняет ориентацию, отрезки кривых

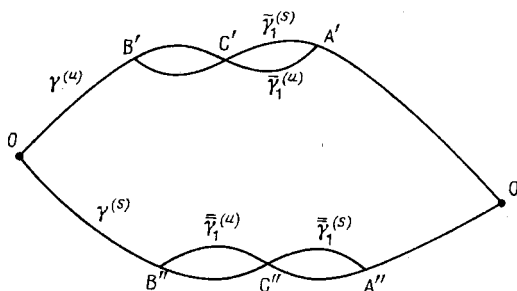


Рис. 15.2

$\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  между  $A'$ ,  $B'$  и  $A''$ ,  $B''$  пересекаются по крайней мере еще раз. Предположим, что в каждом случае есть только по одной такой точке пересечения, которые мы обозначим  $C'$ ,  $C''$ , и в этих точках  $\gamma^{(s)}$ ,  $\gamma^{(u)}$  также пересекаются трансверсально.

Мы рассматриваем траектории, которые лежат в  $U_\varepsilon$ . Любая точка, движущаяся вдоль любой из таких траекторий, подходит очень близко к  $O$ . Затем она уходит от  $O$  и приближается к одной из гомоклинических точек  $A'$ ,  $C'$  или  $A''$ ,  $C''$ . Случайность динамики проявляется в том, что для любой последовательности символов  $A$ ,  $C$  можно найти траекторию, которая приближается к гомоклиническим точкам в соответствии с этой последовательностью символов.

Обозначим  $\bar{\gamma}_1^{(s)}$ ,  $\bar{\gamma}_1^{(u)}$  и  $\bar{\gamma}_2^{(s)}$ ,  $\bar{\gamma}_2^{(u)}$  части  $\gamma^{(s)}$  и  $\gamma^{(u)}$  между  $A'$ ,  $B'$  и  $A''$ ,  $B''$  соответственно (рис. 15.2). Возьмем  $T^k \bar{\gamma}_1^{(u)}$ ,  $T^k \bar{\gamma}_1^{(s)}$ . Они представляют собой гладкие кривые, пересекающие  $\gamma^{(u)}$  трансверсально и становящиеся в малой окрестности  $V$  точки  $O$  все более параллельными  $\gamma^{(u)}$  по мере увеличения  $k$  (рис. 15.3). Из этого рисунка легко видеть, что можно найти пары криволинейных сегментов  $\bar{\gamma}_2^{(u)}$ ,  $\bar{\gamma}_3^{(u)}$ ,  $\bar{\gamma}_2^{(s)}$ ,  $\bar{\gamma}_3^{(s)}$ ,  $\bar{\gamma}_2^{(u)}$ ,  $\bar{\gamma}_3^{(u)}$ ,  $\bar{\gamma}_2^{(s)}$ ,  $\bar{\gamma}_3^{(s)}$ , принадлежащих соответственно  $T^{k_0} \bar{\gamma}_1^{(u)}$ ,  $T^{k_0} \bar{\gamma}_1^{(s)}$ ,  $T^{-k_1} \bar{\gamma}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_1} \bar{\gamma}_1^{(s)}$  и почти параллельных  $\gamma^{(u)}$ ,  $\gamma^{(s)}$  (рис. 15.4). Мы можем всегда предположить, что окрестность  $W$  ограничена кривыми

$\bar{\gamma}_2^{(u)}, \bar{\gamma}_3^{(u)}; \bar{\bar{\gamma}}_2^{(u)}, \bar{\bar{\gamma}}_3^{(u)}$ . Значения  $k_0, k'_0$  также фиксированы. Для краткости мы предполагаем также, что  $k_0 = k'_0, k_1 = k'_1$ .

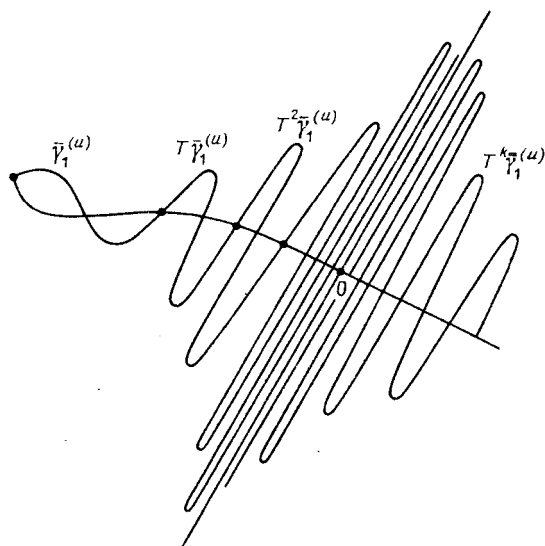


Рис. 15.3

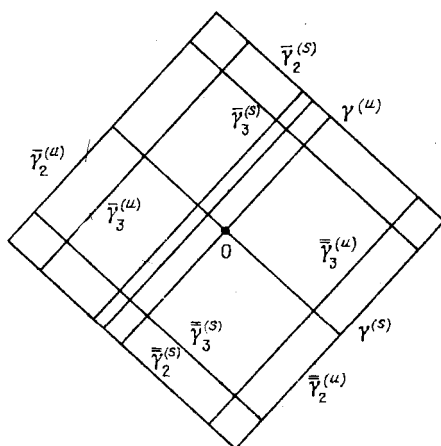


Рис. 15.4

Построим бесконечную последовательность кривых  $\bar{\gamma}_4^{(u)}, \bar{\gamma}_5^{(u)}, \dots, \bar{\gamma}_m^{(u)}, \dots, \bar{\gamma}_m^{(u)} \subset W, T^{-1}\bar{\gamma}_m^{(u)} \supset \bar{\gamma}_{m-2}^{(u)}$  и аналогичные последовательности  $\{\bar{\gamma}_m^{(s)}\}, \{\bar{\bar{\gamma}}_m^{(u)}\}, \{\bar{\bar{\gamma}}_m^{(s)}\}$  (рис. 15.5).

Для дальнейшего нам понадобится криволинейный параллелограмм  $\bar{\Pi}_1^{(s)}$ , ограниченный  $\bar{\gamma}_2^{(u)}$ ,  $\bar{\gamma}_4^{(u)}$  и частями  $\bar{\gamma}_2^{(s)}$ ,  $\bar{\gamma}_2^{(s)}$ ,

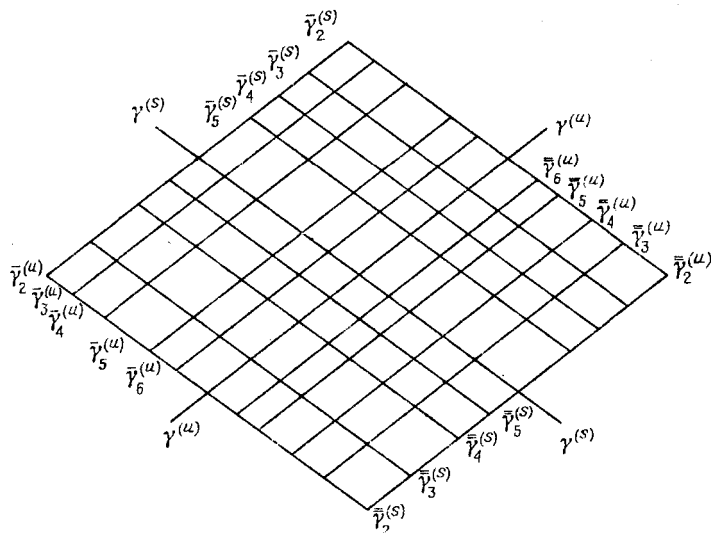


Рис. 15.5

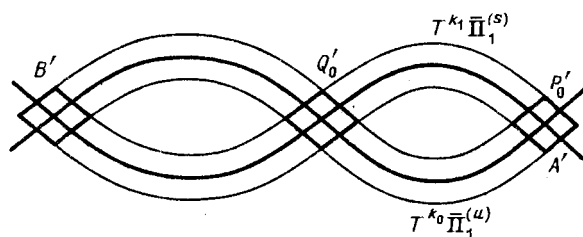


Рис. 15.6

и аналогичные параллелограммы  $\bar{\Pi}_1^{(s)}$ ,  $\bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $\bar{\Pi}_1^{(u)}$  (рис. 15.6). Образы  $T^{-k_0} \bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_1} \bar{\Pi}_1^{(s)}$  также представляют собой криволинейные параллелограммы. Их пересечение состоит из двух параллелограммов  $P'_0$ ,  $Q'_0$ ,  $Q'_0 \subset T^{k_0} \bar{\Pi}_1^{(u)} \cap T^{k_1} \bar{\Pi}_1^{(s)}$ ,  $P'_0 \subset (T^{k_0} \bar{\Pi}_1^{(u)} \cap T^{k_1+1} \bar{\Pi}_1^{(s)}) \cap (T^{-k_1} \bar{\Pi}_1^{(s)} \cup T^{-k_1-1} \bar{\Pi}_1^{(s)})$ . Две компоненты их границ являются частями  $T^{-k_1-1} \bar{\gamma}_2^{(s)}$ ,  $T^{-k_1-1} \bar{\gamma}_2^{(s)}$ , а две другие — частями  $T^{k_1} \bar{\gamma}_2^{(u)}$ ,  $T^{k_1} \bar{\gamma}_2^{(u)}$ . Параллелограмм  $P'_0$  содержит внутри себя  $A'$ , а  $Q'_0$  содержит внутри себя  $C'$ . Аналогичным образом можно построить параллелограммы

$Q_0''$ ,  $P_0''$ , содержащие внутри себя  $C''$  и  $A''$ . Эти четыре параллелограмма будут образующими канторова множества, которое мы сейчас построим (рис. 15.7).

Рассмотрим  $T^{-k_0}P_1$ ,  $T^{-k_0}P_2$ . Это будут параллелограммы, которые содержат внутри себя  $\tilde{\gamma}_2^{(s)}\tilde{\gamma}_3^{(s)}$  (рис. 15.8). Пересечения

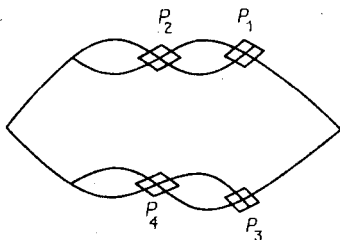


Рис. 15.7

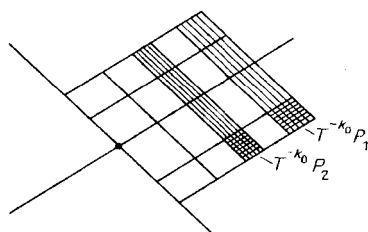


Рис. 15.8

$T^{-k_0}P_1 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_0}P_2 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$  представляют собой криволинейные параллелограммы, две части границ которых принадлежат  $\tilde{\gamma}_2^{(u)}\tilde{\gamma}_3^{(u)}$  (рис. 15.9). Пересечения  $T^{-k_1}(T^{-k_0}P_1 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}) \cap P_4$ ,  $T^{-k_1}(T^{-k_0}P_2 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}) \cap P_3$  представляют собой два параллелограмма, у которых одна пара компонент границы принад-

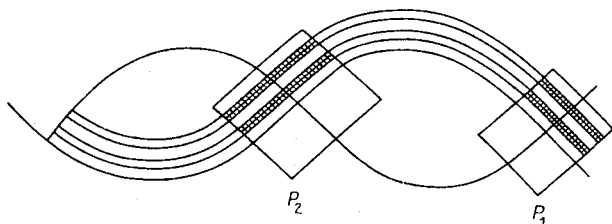


Рис. 15.9

лежит неустойчивой части границы  $P_4$ . Аналогичным образом мы строим два параллелограмма внутри  $P_3$ .

Применим теперь те же аргументы к пересечениям  $T^{-k_0}P_1 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_0}P_2 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$  и к пересечениям  $T^{-k_0}P_4 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_0}P_4 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_0}P_3 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$ ,  $T^{-k_0}P_4 \cap \bar{\Pi}_1^{(u)}$ . В результате вместо 4 параллелограммов  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , мы получаем 16 параллелограммов, которые обозначим  $P_{ij}$  (рис. 15.10). Мы имеем  $P_{ij} = P_i \cap T^{-(k_0-k_1)}P_j$ . Аналогичным образом на следующем шагу конструкции мы получаем  $4^3$  параллелограммов

$$P_{i_0 i_1 i_2} = P_{i_0} \cap T^{-(k_0-k_1)}P_{i_1} \cap T^{-2(k_0-k_1)}P_{i_2} \text{ и т. д.}$$

Бесконечное пересечение  $\bigcap_{m=0}^{\infty} T^{-m(k_0+k_1)} P_{\omega}$  есть гладкая кривая внутри  $P_{i_0}$ , имеющая концы на неустойчивой части границы параллелограмма  $P_{i_0}$  и почти параллельная  $\gamma^{(s)}$ . Слово «почти»

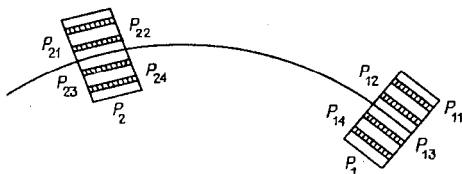


Рис. 15.10

зависит от размера  $W$ . Можно также сказать, что объединение  $\bigcup_{\{i_0, i_1, \dots\}} \bigcap_{m=0}^{\infty} T^{-m(k_0+k_1)} P_{\omega}$  состоит из таких точек  $(z, \varphi) \in \bigcup_{i=1}^4 P_i$ , для которых  $T^{m(k_0+k_1)}(z, \varphi) \in \bigcup_{i=1}^4 P_i$  для всех  $m \geq 0$ .

Заметим теперь  $T$  на  $T^{-1}$ . Тогда для множества  $\bigcap_{m=0}^{\infty} T^{m(k_0+k_1)} \left( \bigcup_{i=1}^4 P_i \right)$  мы имеем аналогичное символическое представление. Оно состоит из кривых  $\bigcap_{m=0}^{\infty} T^{m(k_0+k_1)} P_{\omega}$ , почти параллельных  $\gamma^{(u)}$  и лежащих внутри  $P_{i_0}$ ,  $1 \leq i_0 \leq 4$ . Множество  $\bigcap_{m=-\infty}^{\infty} T^{m(k_0+k_1)} \left( \bigcup_{i=1}^4 P_i \right) = I$  инвариантно относительно  $T^{(k_0+k_1)}$ .

Возьмем пространство  $\Omega$  дважды-бесконечных последовательностей  $\omega = \{\omega_n\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ ,  $\omega_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Обозначим  $S$  сдвиг на шаг влево в  $\Omega$ . Определим непрерывное отображение  $\varphi: \Omega \rightarrow I$ , где  $\varphi(\omega) = \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} T^{m(k_0+k_1)} P_{\omega_m}$ . Ясно, что  $\varphi S = T^{(k_0+k_1)} \varphi$ . Поэтому если  $\nu$  — инвариантная относительно  $S$  мера, то  $\varphi^* \nu$  — инвариантная мера относительно  $T^{k_0+k_1}$ . Если  $\nu$  — мера Бернулли, то нетрудно показать, что  $\varphi$  взаимно-однозначно на множестве полной меры. Это, в частности, означает, что  $T^{k_0+k_1}|I$  с мерой  $\varphi^* \nu$  есть сдвиг Бернулли. Если  $\omega$  — периодическая последовательность, то  $\varphi(\omega)$  — периодическая точка отображения  $T$ .

Все предыдущие рассуждения проводились в предположении, что  $k_0 = k'_0$ ,  $k_1 = k'_1$ . Без этого предположения конструк-

ция дает множество  $I \subset \bigcup_{i=1}^4 P_i$  таких  $(z, \varphi)$ , что первое возвращение в множество  $\bigcup_{i=1}^4 P_i$  принимает одно из четырех значений  $k_0+k_1, k'_0+k'_1, k_0+k'_1, k'_0+k_1$ . Закончим наши рассмотрения точной формулировкой полученного результата.

**Теорема.** При предположениях, сформулированных в начале этой лекции, существует инвариантное относительно  $T$  множество  $I$  со следующими свойствами:

1.  $I$  имеет бесконечное число периодических траекторий.
2. отображение  $T$  имеет инвариантную меру, по отношению к которой оно изоморфно сдвигу Бернулли.

Из теоремы вытекает, что  $T$  имеет «случайные» траектории. Теорема показывает также важность появления трансверсальных пересечений  $\gamma^{(c)}, \gamma^{(u)}$ . Как уже отмечалось в предыдущей лекции, в ряде случаев существование таких пересечений может быть проверено с помощью уже упоминавшегося метода Мельникова. В ситуациях, где он работает, динамическая система зависит от параметра. Угол между устойчивым и неустойчивым многообразиями как функция этого параметра оценивается с помощью теории возмущений. При этом асимптотически этот угол ведет себя в главном порядке как некоторая степень параметра. Однако в предыдущей лекции мы показали, что в некоторых естественных случаях этот угол может быть экспоненциально мал и тем самым не может быть найден с помощью теории возмущений.

Инвариантное множество, состоящее из траекторий, целиком принадлежащих  $U_\varepsilon$ , иногда называется стохастическим слоем.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Впервые идея о том, что появление гомоклинических и гетероклинических точек с трансверсальным пересечением устойчивого и неустойчивого многообразий приводит к сложной структуре динамики была высказана Пуанкаре в книге

[1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики: Избр. труды. В 3 т.—М.: Наука, 1971, 1972;

См. также

[2] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН.—1963.—Т. 18, № 6.—С. 91—192.

Первый анализ динамики в стохастическом слое содержится в статье Биркгофа

Birchhoff G. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamique // Mem. Pont Acad. Sci. Non Lyncaei. Ser. 3.—1935.—V. 1.—P. 85—216.

2° Полное исследование структуры траекторий в стохастических слоях принадлежит С. Смейлу—см. его обзорную статью



[3] Smale S. Differentiable Dynamical Systems (Рус. пер.: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН.— 1970.— Т. 25, № 1.— С. 113—185), а также

Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points // Differential and Combinatorial Topology.— Princeton, N.Y.: Princeton University Press, 1965.— P. 63—80

и статью

[4] Шильников Л. П. О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло—фокуса // ДАН СССР.— 1967.— Т. 172, № 1.— С. 54—57.

3° В последнее время появились работы Г. М. Заславского, Р. З. Сагдеева и их сотрудников, где стохастические слои образуют сложную паутину, по которой траектории могут уходить неограниченно далеко, наподобие траекторий случайного блуждания. См. по этому поводу

[5] Заславский Г. М., Сагдсев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Минимальный хаос, стохастическая паутина и структуры с симметрией типа «квазикристалл». — Препринт № 1289, ИК, 1987.

## ЧАСТЬ V

### ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой части книги мы обсудим некоторые аспекты теории гиперболических динамических систем, объясняющие, в каком смысле эти системы имеют стохастическое поведение. Естественно, что при этом основное внимание уделяется эргодическим, а не топологическим вопросам.

#### ЛЕКЦИЯ 16

#### ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ, РАЗРЫВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Вначале мы рассмотрим основные примеры систем, к которым применима развиваемая далее теория. Напомним определение геодезических потоков (см. 1° в конце лекции).

Пусть  $Q$  — компактное замкнутое  $C^\infty$ -риманово многообразие и  $M$  — его единичный касательный пучок. Точки  $M$  могут быть записаны как  $x = (q, v)$ , где  $q \in Q$ ,  $v \in \mathcal{T}_q$  и  $\mathcal{T}_q$  — касательное пространство в точке  $\|v\| = 1$ . Геодезический поток  $\{S^t\}$  на  $M$  есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов  $M$ , где  $S^t x$  есть результат параллельного перенесения  $v$  вдоль геодезической, определяемой  $x$ , на расстояние  $t$ . Геодезический поток сохраняет меру Лиувилля  $d\mu(x) = d\sigma(q) d\omega_q(v)$ , где  $d\sigma$  есть мера на  $Q$ , индуцированная римановой метрикой,  $d\omega_q(v)$  есть мера Лебега на сфере единичных касательных векторов  $v \in T_q$ . Эргодические свойства  $\{S^t\}$  существенно зависят от топологии и римановой структуры на  $Q$ . Далее мы увидим, что для нас особый интерес представляют многообразия  $Q$ , кривизна которых по любому двумерному направлению отрицательна.

Естественное обобщение геодезических потоков строится следующим образом. Пусть  $M^{(r)}$  есть пространство  $r$ -реперов, т. е. пространство, точки которого имеют вид  $x^{(r)} = (q, v_1, \dots, v_r)$ , где  $q \in Q$ ,  $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{T}_q$ ,  $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$  и, естественно,  $r \leq \dim Q$ . Обобщенный геодезический поток  $\{S^t\}$  сдвигает  $x^{(r)}$  вдоль геодезической, определяемой  $(q, v_1)$ , на расстояние

$t$ . Каждый вектор  $v_j$ ,  $j > 1$ , параллельно сдвигается вдоль этой геодезической. Поток  $\{S^t\}$  сохраняет меру  $d\mu(x^{(r)}) = d\sigma(q) \cdot d\omega_q^{(r)}(v_1, \dots, v_r)$ , где  $d\omega_q^{(r)}$  есть естественная мера Лебега на пространстве  $r$ -реперов, инвариантная относительно групповых преобразований.

Среди других случаев, к которым относится развиваемая далее теория, есть ряд примеров разрывных или кусочно-гладких динамических систем. Следует отметить, что часто изучение свойств их стохастического поведения оказывается гораздо проще, чем изучение тех же свойств их гладких аппроксимаций. Поэтому мы собираемся дать достаточно общее определение динамических систем с особенностями, а потом описать интересные нас примеры.

Фазовые пространства  $M$  таких систем представляют собой объединения многообразий с кусочно-гладкой границей. Возьмем  $M_0$ , представляющее собой гладкое  $n$ -мерное риманово  $C^\infty$ -многообразие, и допустим, что на  $M_0$  заданы  $C^\infty$ -функции  $f_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , такие, что  $f_i^{-1}(0)$  не содержат критических точек. Мы рассматриваем  $M = \{x \in M_0 \mid f_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq k\}$ , где граница  $\partial M = \bigcup_{i=1}^k \{\partial M \cap f_i^{-1}(0)\} = \bigcup_{i=1}^k \partial M_i$ . Предполагается, что в точках  $x \in \partial M_{i_1} \cap \partial M_{i_2}$  векторы  $\text{grad} f_{i_1}$  и  $\text{grad} f_{i_2}$  не коллинеарны. Будем называть  $M$  многообразием с кусочно-гладкой границей, а  $\partial M_i$  — компонентами его границы. Допускаются также фазовые пространства, являющиеся объединениями многообразий  $M_s$  с кусочно-гладкими границами,  $s = 1, \dots, m$ ,  $M = \bigcup_{s=1}^m M_s$ .

Мы будем рассматривать кусочно-гладкие отображения и кусочно-гладкие векторные поля, определенные на  $M$ . В первом случае предполагаем, что каждое  $M_s$  есть компонента, внутри которой  $T$  является бесконечно-дифференцируемым и все производные имеют пределы при приближении изнутри к точкам границы  $\partial M_s$ . Во втором случае мы рассматриваем  $C^\infty$ -векторные поля такие, что каждая траектория достигает границы за конечное время. Обозначим  $\partial M^{(\text{int})}$ ,  $\partial M^{(\text{out})}$  множество точек границы, где векторное поле направлено внутрь  $M$  (вне  $M$ ). На  $\partial M^{(\text{out})} \cap \partial M^{(\text{in})}$  векторное поле касается  $\partial M$ . Допустим, что  $\partial M^{(\text{in})}$  и  $\partial M^{(\text{out})}$  представляют собой многообразия с кусочно-гладкой границей и определено кусочно-гладкое отображение  $S: \partial M^{(\text{out})} \rightarrow \partial M^{(\text{in})}$ , которое тождественно на  $\partial M^{(\text{out})} \cap \partial M^{(\text{in})}$ . В тот момент, когда движущаяся точка достигает точки края  $x \in \partial M^{(\text{out})}$ , она мгновенно перепрыгивает в точку  $Sx$  и продолжает свое

движение из  $Sx$ . Считается также, что при попадании на  $\partial M^{(out)} \cap \partial M^{(in)}$  точка может продолжать движение. Мы будем рассматривать только те траектории, которые не проходят через пересечения нескольких компонент границы.

Типичными примерами кусочно-гладких потоков служат бильярды, о которых отчасти уже шла речь в лекции 6 (см. 2°). Рассмотрим замкнутую область  $Q$ , причем либо  $Q \subset R^d$ , либо  $Q \subset \text{Тог}^d$  и  $Q$  имеет кусочно-гладкую границу. Бильярд в  $Q$  — это динамическая система, соответствующая движению материальной точки внутри  $Q$  с постоянной скоростью и с отражением от границы по закону «угол падения равен углу отражения». В многомерном случае это означает, что касательная составляющая скорости сохраняется, а нормальная меняет знак. Фазовое пространство бильярда  $M$  представляет собой, как и в случае геодезических потоков, единичный касательный пучок к  $Q$ ,  $\partial M^{(out)} (\partial M^{(in)})$  состоит из единичных касательных векторов, носители которых принадлежат  $\partial Q$ , а векторы скорости направлены вне  $Q$  (внутри  $Q$ ),

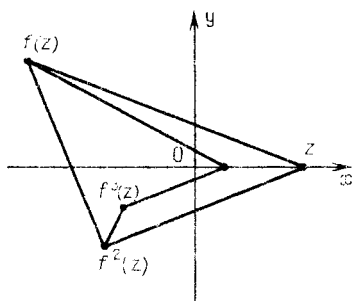


Рис. 16.1

$\partial M^{(out)} \cap \partial M^{(in)}$  состоит из единичных касательных векторов, касающихся  $\partial Q$ . Отображение  $S$  преобразует каждый касательный вектор из  $\partial M^{(out)}$  в соответствующий касательный вектор из  $\partial M^{(in)}$  с тем же носителем. Бильярдный поток  $\{S^t\}$  сохраняет ту же самую меру Лиувилля  $d\mu(x) = dq dv$ , что и геодезический поток.

Приведем теперь несколько примеров кусочно-гладких отображений.

1. *Отображение Лози* (см. 3°). Это отображение является кусочно-линейным отображением плоскости в себя, задаваемым формулами

$$f: (x, y) \mapsto (1 + y - a|x|, bx).$$

Мы будем рассматривать только такие значения параметров  $(a, b)$ , что  $a > 0$ ,  $0 < b < 1$ ,  $a + b > 1$ . Возьмем точку

$$z = \left( \frac{2 + a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2(1 + a - b)}, 0 \right).$$

**Лемма.** Пусть  $F$  — треугольник с вершинами  $z$ ,  $f(z)$ ,  $f^2(z)$  (рис. 16.1). Тогда  $f(F) \subset F$ .

Доказательство леммы проводится с помощью непосредственных вычислений и поэтому опускается. Образ  $f(F)$  есть пятиугольник, изображенный на рис. 16.1.

Нас в дальнейшем будет интересовать поведение  $f$  на множестве  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(F) = A$ . Отображение Лози было введено как упрощение известного отображения Эно:  $(x, y) \mapsto (1 + y - ax^2, bx)$ , которое гораздо труднее для анализа.

2. *Отображение Белых* (см. 4°). Возьмем  $I = [-1, 1]$ , квадрат  $K = I \times I$  и прямую  $L = \{(x, y) | y = kx\}$ . Рассмотрим отображение  $f$ , заданное формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda_1(x-1)+1, & \lambda_2(y-1)+1 & \text{при } y > kx, \\ \lambda_1(x+1)-1, & \lambda_2(y+1)-1 & \text{при } y < kx. \end{cases}$$

Оно было введено в работах Белых и его соавторов (см. ссылки в конце лекции) в связи с некоторыми проблемами фазовой синхронизации. Наложим на  $\lambda_1, \lambda_2$  следующие ограничения:

$$0 < \lambda_1 < \frac{1}{2}, \quad 1 + \lambda_2 < \frac{2}{1+|k|}, \quad |k| < 1, \quad k \neq 0.$$

Тогда  $f(K \setminus L) \subset K$ , и мы можем построить последовательность множеств  $K_n = f(K_{n-1} \setminus L)$ ,  $K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \dots$ , и их пересечение  $A = \bigcap_n K_n$ . Излагаемая в этой и следующих лекциях теория дает некоторую информацию о статистических свойствах отображения Белых на множестве  $A$ .

3. *Система Лоренца*. Система Лоренца есть система трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\sigma, r, b$  — численные параметры, имеющие определенный физический смысл. Система (1) была введена известным американским океанологом, климатологом и гидродинамиком Э. Лоренцем (см. 5°) при изучении некоторых моделей конвекции, но здесь эту сторону проблемы мы обсуждать не будем. Система (1) удивительно проста, однако ее динамика

оказывается чрезвычайно сложной. После того как она стала известна физикам, идеи динамики со стохастическим поведением и странных аттракторов приобрели большую популярность.

Объясним теперь, как при изучении таких гладких динамических систем, как система Лоренца, возникают разрывные отображения (см. [5]). Численный счет и качественные соображения показывают, что существуют значения параметров  $\sigma_0$ ,  $r_0$ ,  $b_0$ , при которых (1) имеет ряд специальных свойств, перечисляемых ниже.

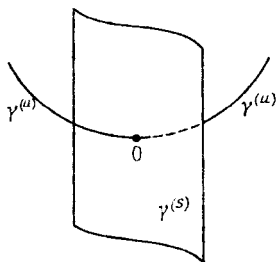


Рис. 16.2

1. Точка  $O = (0, 0, 0)$  является неподвижной точкой. Она имеет одномерное неустойчивое многообразие  $\gamma^{(u)}(0)$  (см. лекцию 6), выходящее из точки  $O$ , и двумерное устойчивое многообразие  $\gamma^{(s)}(0)$ , состоящее из таких точек, полутраектории кото-

рых стремятся к  $O$  при  $t \rightarrow \mp \infty$  соответственно. Их примерный вид представлен на рис. 16.2.

2. При этих значениях параметров имеются два периодических решения  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , которые переходят друг в друга при симметрии  $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ . Оба  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  имеют двумерные устойчивые многообразия  $\Gamma^{(s)}(\Pi_1)$ ,  $\Gamma^{(s)}(\Pi_2)$ , которые локально выглядят как двумерные цилиндры и состоят из траекторий, наматывающихся на  $\Pi_j$ ,  $j=1, 2$ , при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 16.3).

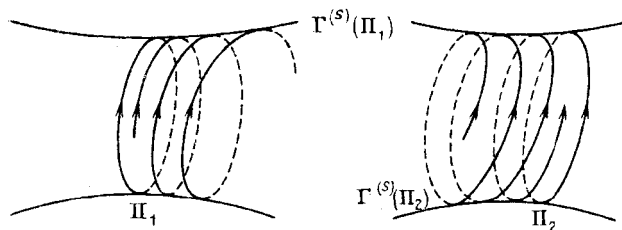


Рис. 16.3

3. Значения  $\sigma_0$ ,  $r_0$ ,  $b_0$  выделены тем, что левая (правая) ветвь  $\gamma^{(u)}(O)$  принадлежит  $\Gamma^{(s)}(\Pi_2)$ , ( $\Gamma^{(s)}(\Pi_1)$ ) (см. рис. 16.4, где изображена только половина картины, а другая получается по симметрии).

Рассмотрим горизонтальную плоскость  $P = \{(x, y, z) | z = z_0\}$ , пересекающую  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и проходящую не слишком

далеко от  $O$ . Пересечение  $P \cap \gamma^{(s)}(O)$  локально представляет собой гладкую кривую  $R_0$  (см. рис. 16.4 и 16.5). Поскольку  $P$  пересекает  $\Pi_1, \Pi_2$ , то она пересекает также и  $\Gamma^{(s)}(\Pi_1), \Gamma^{(s)}(\Pi_2)$ . Обозначим эти пересечения через  $R_1, R_2$  (см.

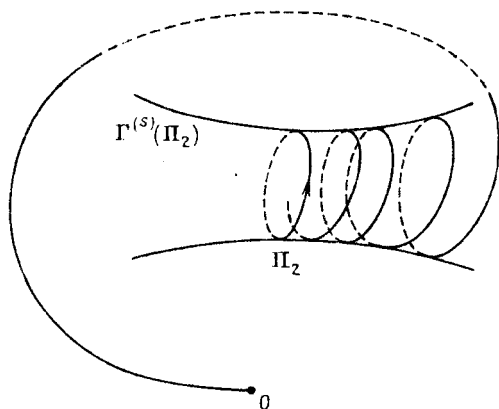


Рис. 16.4

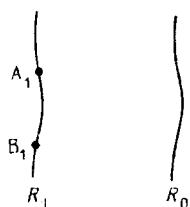


Рис. 16.5

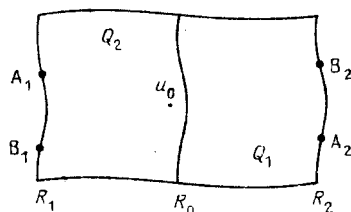


Рис. 16.6

рис. 16.5, где плоскость  $P$  изображена вертикально), а через  $A_1, A_2$  — точки пересечения  $R_1, R_2$  с  $\Pi_1, \Pi_2$ . Нам понадобятся также точки  $B_1, B_2$ , которые представляют собой точки первого пересечения  $\gamma^{(u)}(O)$  с  $R_1, R_2$  соответственно (рис. 16.5).

4. Построим криволинейный четырехугольник  $U \subset R$ , у которого одна пара сторон состоит из  $R_1, R_2$ , а другая пара сторон  $Q_1, Q_2$  строго не фиксирована (рис. 16.6), и рассмотрим отображение Пуанкаре  $T$  на  $U$ . Напомним, что отображение Пуанкаре определяется следующим образом. Из любой точки  $u_0 \in U$  выпустим траекторию до первого пересечения с  $U$ . Это пересечение и есть  $Tu_0$ .

Поскольку  $\Gamma^{(s)}(\Pi_1), \Gamma^{(s)}(\Pi_2)$  — устойчивые многообразия  $\Pi_1, \Pi_2$ , то легко понять, что  $TR_1 \subset R_1, TR_2 \subset R_2$ . Если

$u_0$  близка к  $R_0$  и лежит слева от  $R_0$ , то вышедшая из нее траектория в течение большого интервала времени будет двигаться вдоль  $\Gamma^{(s)}(O)$ , приближаясь к  $O$ , но затем она начнет уходить от  $O$  вдоль левой части  $\gamma^{(u)}(0)$ . Поэтому она пересечет  $U$  в малой окрестности  $B_2$ . Пусть  $u_0 \rightarrow R_0$ . Тогда образ точки  $u_0$  под действием отображения Пуанкаре стремится к  $B_2$ . Можно сказать, что «левый берег»  $R_0$  переходит под действием  $T$  в  $B_2$ , а «правый берег» — в  $B_1$ . Это показывает, что  $T$  терпит разрыв на  $R_0$ . На рис. 16.7 показаны образы

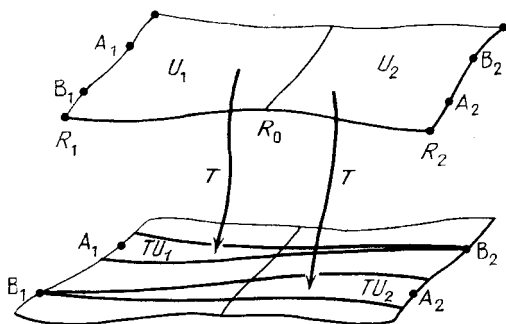


Рис. 16.7

левой и правой половин  $U_1$ ,  $U_2$  области  $U$ . Стороны  $Q_1$ ,  $Q_2$  можно выбрать так, что эти образы будут состоять из двух связных компонент. Теория, строящаяся в этой и последующих лекциях, применима к подобным отображениям.

Вернемся теперь к общей ситуации. Рассмотрим кусочно-гладкое отображение  $T$  фазового пространства  $M$  с кусочно-гладкой границей, причем  $T^{-1}$  определено и принадлежит к тому же классу отображений. Следующее понятие, по существу, уже встречалось в лекции 6.

**Определение 1.** Открытое  $C^2$ -подмногообразие  $\gamma \subset M$ , положительной размерности, гомеоморфное шару, называется локальным устойчивым многообразием (л. у. м.) точки  $x \in M$ , если

- 1)  $x \in \gamma$ ;
- 2) для любого  $u \in \gamma$  точки  $T^n x$ ,  $T^n u$  принадлежат одной и той же компоненте гладкости  $T$  при всех  $n \geq 0$ ;
- 3)  $\sup_{u \in \gamma} \text{dist}_{T^n \gamma}(T^n x, T^n u) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ;

здесь  $\text{dist}_{T^n \gamma}$  есть расстояние, вычисленное во внутренней метрике  $T^n \gamma$ .

Если в 2), 3)  $n \leq 0$  и  $n \rightarrow -\infty$ , то  $\gamma$  называется локальным неустойчивым многообразием (л. н. м.).



Мы будем обозначать л. у. м., л. н. м. точки  $x$  через  $\gamma^{(s)}(x)$ ,  $\gamma^{(u)}(x)$ .

**Определение 2.** Устойчивым многообразием (у. м.) точки  $x$  называется множество таких точек  $y$ , для которых найдется  $n(y) = n > 0$  и  $\gamma^{(s)}(T^n x)$  такие, что  $T^n y \in \gamma^{(s)}(T^n x)$ .

У. м. обозначаются  $\Gamma^{(s)}(x)$ . Ясно, что  $\Gamma^{(s)}(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n} \gamma^{(s)}(T^n x)$ .

Аналогично определяются неустойчивые многообразия (н. м.)

$$\Gamma^{(u)}(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^n \gamma^{(u)}(T^{-n} x).$$

Определения 1 и 2 естественно переносятся на случай потоков.

Ясно, что

$$\Gamma^{(s)}(T^n x) = T^n \Gamma^{(s)}(x), \quad \Gamma^{(u)}(T^n x) = T^n \Gamma^{(u)}(x)$$

при всех  $n$ ,  $-\infty < n < \infty$ .

Пусть  $\mathcal{U}_0 \subset R^k$  — открытое множество,  $T$  есть  $C^\infty$ -диффеоморфизм, заданный на  $\mathcal{U}_0$ , и  $\mathcal{U}_1 = T\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0$ , причем  $\text{Cl}(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_0$ , где  $\text{Cl}$  — замыкание. Тогда множества  $T^n \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_n$  образуют убывающую последовательность открытых множеств. Рассмотрим  $A = \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{U}_0$ . Иногда  $A$  называется аттрактором,

поскольку для любого  $x \in \mathcal{U}_0$  точка  $T^n x \in \mathcal{U}_n$  и тем самым полутраектория  $x$  притягивается к  $A$ . Поскольку замыкание  $\text{Cl}(\mathcal{U}_0) \supset \mathcal{U}_0$ , то  $T\mathcal{U}_0 \subset \text{Cl}(T\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}_0$ , и поэтому  $A = \bigcap_{n \geq 0} T^n \text{Cl}(\mathcal{U}_0)$ . Тем самым  $A$  замкнуто как пересечение последовательности замкнутых множеств. Если  $x \in A$ , то вся траектория  $\{T^n x, -\infty < n < \infty\}$  точки  $x$  принадлежит  $A$ . Это утверждение очевидно для  $n > 0$ . Если  $n < 0$ , то, поскольку  $x \in \mathcal{U}_{m-n}$  при всех  $m > n$ ,  $T^n x \in \mathcal{U}_m$ , т. е.  $T^n x \in A$ .

**Лемма 1.** Если  $x \in A$ , то н. м.  $\Gamma^{(u)}(x) \in A$ .

**Доказательство.** Пусть  $y \in \Gamma^{(u)}(x)$ . Мы покажем, что  $y \in \mathcal{U}_m$  при любом  $m \geq 0$ . При некотором  $n_0(y) = n_0 > 0$  имеет место включение  $T^{-n_0} y \in \gamma^{(u)}(T^{-n_0} x)$ . Поскольку  $\text{dist}(T^{-n_0-n} y, T^{-n_0-n} x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $T^{-n_0-n} x \in A$ , то  $T^{-n_0-n} y \in U_0$  и  $y \in T^{n_0+n} U_0 \subset \mathcal{U}_m$ , если  $n$  достаточно велико, что и требовалось доказать.

Лемма 1 показывает, почему в последующих рассуждениях н. м. играют более важную роль, чем у. м.

Вернемся к общим кусочно-гладким отображениям. Возьмем такое множество  $M_0 \subset M$ , что каждая точка  $x \in M_0$  имеет н. м.  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Допустим, что на каждом  $\Gamma^{(u)}(x)$  задана  $\sigma$ -конечная мера  $\nu_{\Gamma^{(u)}(x)}$ .

**Определение 2.** Семейство мер  $\nu_{\Gamma^{(u)}(x)}$  называется инвариантным, если для любых борелевских множеств  $B_1, B_2 \subset \Gamma^{(u)}(x)$  конечной меры

$$\frac{\nu_{\Gamma^{(u)}(x)}(B_1)}{\nu_{\Gamma^{(u)}(x)}(B_2)} = \frac{\nu_{\Gamma^{(u)}(Tx)}(TB_1)}{\nu_{\Gamma^{(u)}(Tx)}(TB_2)}.$$

Сейчас мы покажем, что при некоторых естественных предположениях динамика создает инвариантные семейства мер. Рассмотрим случай, когда для точки  $x$  все  $\gamma^{(u)}(T^n x)$ ,  $n < 0$ , принадлежат классу  $C^2$  и  $\gamma^{(u)}(T^n x) \xrightarrow{T^{-1}} \gamma^{(u)}(T^{n-1}x)$  есть равномерное сжатие, т. е.

1) при некоторой постоянной  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , и всех  $n < 0$

$$\text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^{n-1}x)}(T^{-1}y', T^{-1}y'') \leq \lambda \text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^n(x))}(y', y'');$$

2) при некоторых постоянных  $\rho$ ,  $C_0 > 0$ , зависящих от  $x$ , для всех  $n > 0$

$$\text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^n x)}(T^n x, \partial \gamma^{(u)}(T^n x)) \geq C_0 |n|^{-\rho}.$$

Обозначим  $\sigma_{\gamma^{(u)}(y)}$  меру на  $\gamma^{(u)}(y)$ , индуцированную римановым объемом.

Введем вначале так называемый коэффициент объемного растяжения (или просто коэффициент растяжения) неустойчивого многообразия. Возьмем  $\gamma^{(u)}(x)$ . Тогда для любого  $B \subset \gamma^{(u)}(x)$  мы можем написать

$$\sigma(T^{-1}B) = \int_{T^{-1}B} d\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-1}x)}(y) = \int_B (\lambda^{(u)}(y))^{-1} d\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(y).$$

Поскольку отображение  $\gamma^{(u)}(x) \xrightarrow{T^{-1}} \gamma^{(u)}(T^{-1}x)$  является сжатием, то  $\lambda^{(u)}(y) > 1$ . Если мы прочитаем это равенство в обратном порядке, то получим

$$\int_{TB} d\sigma_{\gamma^{(u)}(Tx)}(y) = \int_B \lambda^{(u)}(Ty) d\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(y)$$

в предположении, что  $TB \subset \gamma^{(u)}(Tx)$ . Функция  $\lambda^{(u)}(y)$  и называется коэффициентом растяжения. Положим для  $B \subset \gamma^{(u)}(x)$

$$\nu_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n)}(B) = \frac{\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(T^{-n}B \cap \gamma^{(u)}(T^{-n}x))}{\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(T^{-n}\gamma^{(u)}(x) \cap \gamma^{(u)}(T^{-n}x))}. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Пусть вдоль траектории точки  $x$  выполнены соотношения  $T^{-1}\gamma^{(u)}(T^n x) \subset \gamma^{(u)}(T^{n-1}x)$  при всех  $n < 0$ , и пусть

коэффициент растяжения  $\lambda^{(u)}$  удовлетворяет равномерному условию Гёльдера в том смысле, что при некоторых постоянных  $\rho_1 > 0$ ,  $C_1 > 0$ , не зависящих от  $n$ , и всех  $n \leq 0$  для  $y', y'' \in \gamma^{(u)}(T^n x)$

$$\left| \frac{\lambda^{(u)}(y')}{\lambda^{(u)}(y'')} - 1 \right| \leq C_1 [\text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^n x)}(y', y'')]^{\rho_1}.$$

Тогда существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n)}(B) = \bar{v}_{\gamma^{(u)}(x)}(B)$ .

**Замечание.** Эта теорема имеет тот же характер, что и лемма 1 лекции 12.

**Доказательство.** Прежде чем привести формальное доказательство, поясним его идею. Множество  $T^{-n}B$  очень мало при больших  $n$  в силу свойства сжатия л. н. м. На малых расстояниях любое нелинейное преобразование ведет себя как линейное. Но при линейном преобразовании  $T^{-n}B$  и  $T^{-n}\gamma^{(u)}(x)$  растягиваются одинаковым образом. Поэтому (1) почти не меняется при замене в (1)  $n$  на  $n+1$ .

Приведем теперь более формальное доказательство. Напишем

$$v_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n+1)}(B) = \frac{\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n-1}x)}(T^{-n-1}B)}{\int_{T^{-n-1}\gamma^{(u)}(x)} d\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n-1}x)}(y)} = \frac{\int_{T^{-n}B} (\lambda^{(u)}(y))^{-1} d\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(y)}{\int_{T^{-n}\gamma^{(u)}(x)} (\lambda^{(u)}(y))^{-1} d\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(y)}.$$

Заметим теперь, что  $\text{dist}_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(y', y'') \leq \lambda^n \cdot \text{const}$  для любых  $y', y'' \in T^{-n}\gamma^{(u)}(x)$ . Выберем произвольную точку  $\bar{y} \in T^{-n}\gamma^{(u)}(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} v_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n+1)}(B) &= \frac{\int_{T^{-n}B} \left( \frac{\lambda^{(u)}(y)}{\lambda^{(u)}(\bar{y})} \right)^{-1} d\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(y)}{\int_{T^{-n}\gamma^{(u)}(x)} \left( \frac{\lambda^{(u)}(y)}{\lambda^{(u)}(\bar{y})} \right)^{-1} d\sigma_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)}(y)} \leq \\ &\leq (1 + \text{const} \cdot C_1 \lambda^{an}) (1 - \text{const} \cdot C_1 \lambda^{an})^{-1} v_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n)}(B) \end{aligned}$$

и

$$v_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n+1)}(B) \geq (1 - \text{const} \cdot C_1 \lambda^{an}) (1 + \text{const} \cdot C_1 \lambda^{an})^{-1} v_{\gamma^{(u)}(x)}^{(n)}(B).$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Итак, на  $\gamma^{(u)}(x)$  построена мера  $\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x)}$ . Покажем теперь, что если  $\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x'') \neq \emptyset$ , то найдется такая постоянная  $\kappa = \kappa(x', x'')$ , что для любого  $B \subset \gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x'')$

$$\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (B) = \kappa \bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (B). \quad (2)$$

Мы имеем

$$\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (B) = \frac{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (B)}{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x''))} \cdot \bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x'')),$$

$$\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (B) = \frac{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (B)}{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x''))} \cdot \bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x'')),$$

Из построения  $\bar{v}_{\gamma^{(u)}}$  непосредственно вытекает, что

$$\frac{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (B)}{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x''))} = \frac{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (B)}{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x''))}.$$

Это дает (2) при

$$\kappa = \frac{v_{\gamma^{(u)}(x')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x''))}{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(x'')} (\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(u)}(x''))}.$$

Соотношение (2) позволяет построить меру на всем  $\Gamma^{(u)}(x)$ .

По определению  $\Gamma^{(u)}(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^n \gamma^{(u)}(T^{-n}x)$ . Пусть  $B \subset T^n \gamma^{(u)}(T^{-n}x)$ . Положим

$$\bar{v}_{\Gamma^{(u)}(x)} (B) = \frac{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)} (T^{-n}B)}{\bar{v}_{\gamma^{(u)}(T^{-n}x)} (T^{-n}\gamma^{(u)}(x))}.$$

Знаменатель последнего выражения может рассматриваться как нормировка. Из (2) следует, что это определение корректно в том смысле, что если рассматривать  $B$  как принадлежащее  $T^{n+1} \gamma^{(u)}(T^{-n-1}x)$ , то  $\bar{v}_{\Gamma^{(u)}(x)}(B)$  при этом не изменится. Тем самым на  $\Gamma^{(u)}(x)$ , где можно обеспечить условия теоремы 1, определена мера  $\bar{v}_{\Gamma^{(u)}(x)}$ . Конструкция этой меры может быть проведена и при существенно более слабых предположениях.

Дальнейшее развитие теории мы отложим до следующей лекции, а сейчас рассмотрим несколько примеров.

1. *Групповые автоморфизмы  $T$   $m$ -мерного тора  $\text{Tor}^m$*  задаются вещественными целочисленными матрицами  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $\det A = \pm 1$ . Каждый такой автоморфизм действует по формуле  $Tx = Ax \pmod{1}$ . Он называется гиперболическим, если абсолютные величины его собственных значений не равны 1. Как известно из линейной алгебры, в таком случае все  $m$ -мерное пространство  $\mathbf{R}^m$  допускает разложение  $\mathbf{R}^m = R^{(u)} + R^{(s)}$ , где  $AR^{(u)} = R^{(u)}$ ,  $AR^{(s)} = R^{(s)}$ . При этом в  $\mathbf{R}^m$  можно ввести метрику таким образом, что  $\|Ae\| \geq \lambda \|e\|$ ,  $e \in R^{(u)}$ ,  $\|Ae\| \leq \lambda^{-1} \|e\|$ ,  $e \in R^{(s)}$ , при некоторой постоянной  $\lambda > 1$ . Обозначим  $k = \dim R^{(u)}$ ,  $l = \dim R^{(s)}$ ,  $k + l = m$ . Непосредственное обобщение рассуждений, проведенных в лекции 2 при

$m=2$ , показывает, что  $T$  эргодично по отношению к мере Лебега. В этом случае каждая точка  $x \in \text{Toг}^m$  имеет  $k$ -мерное н. м.  $\Gamma^{(u)}(x)$ , представляющее собой проекцию плоскости, параллельной  $R^{(u)}$  и проходящую через  $x$ , при естественном отображении  $\mathbf{R}^m \rightarrow \text{Toг}^m$ . Аналогичным образом строится у. м.  $\Gamma^{(s)}(x)$  как образ плоскости, параллельной  $R^{(s)}$ . Меры  $\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}(x)}$  представляют собой меры Лебега на слоях  $\Gamma^{(u)}(x)$ .

Ситуация незначительно меняется, если к  $T$  добавить малые линейные члены, т. е. рассмотреть отображения  $T_1$  вида

$$(T_1 x)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + f_i(x, \dots, x_m) \pmod{1}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где  $f_i$  — периодические функции периода 1 по каждой переменной, малые в  $C^2$ -топологии. По-прежнему каждая точка  $x$  имеет  $k$ -мерное н. м.  $\Gamma^{(u)}(x)$  и  $l$ -мерное у. м.  $\Gamma^{(s)}(x)$ . При этом  $\Gamma_1^{(s)}(x)$  есть  $k$ -мерное многообразие, однозначно проектирующееся на  $R^{(u)}$  и отстоящее от  $\Gamma^{(u)}(x)$  на конечное расстояние. Теперь уже  $\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}(x)}$  будет неравномерной мерой, плотность которой по мере Лебега ограничена сверху и снизу положительными постоянными.

Диффеоморфизмы  $T_1$  представляют собой частный случай так называемых диффеоморфизмов Аносова (см. 6°).

2. Рассмотрим геодезические потоки (г. п.) на компактных поверхностях отрицательной кривизны. Исследование таких г. п. представляет собой важный раздел эргодической теории, который связан с теорией автоморфных функций, теорией чисел, квантовым хаосом и др. Здесь мы ограничимся изложением основных свойств этих потоков и проиллюстрируем введенные выше понятия.

Каждая компактная поверхность отрицательной кривизны строится исходя из плоскости Лобачевского  $L$  и дискретной подгруппы  $\Gamma$ , состоящей из гиперболических движений плоскости  $L$ , и имеет вид  $Q = L/\Gamma$ . Для простоты считаем, что риманова метрика  $ds^2$  на  $Q$  принадлежит классу  $C^\infty$  и гауссова кривизна, индуцированная этой метрикой, всюду отрицательна. Как обычно, фазовое пространство  $M$  г. п. есть пучок единичных касательных векторов к  $Q$ .

В основе нашего анализа лежит следующее свойство метрик отрицательной кривизны. Пусть  $x = (q, v) \in M$ ,  $q \in Q$ . Возьмем  $q' \in Q$ , близкую к  $q$ . Тогда существует единственный  $x' = (q', v') \in M$ , близкий к  $x$  и такой, что  $\text{dist}(S^t x, S^{t+\tau} x') \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\{S^t\}$  есть г. п. и  $\tau = \tau(q')$  есть  $C^1$ -функция. Стремление к нулю происходит с экспоненциальной скоростью (рис. 16.8).

Множество  $\{q' | \tau(q')=0\}$  есть  $C^\infty$ -кривая  $\tilde{\gamma}^{(s)}(x)$  на  $Q$ . Кривая  $\gamma^{(s)}(x)$  в  $M$ , состоящая из единичных векторов, ортогональных к  $\tilde{\gamma}^{(s)}(x)$ , есть л. у. м. точки  $x$ . Аналогично строится л. н. м.  $\gamma^{(u)}(x)$ , и по общей формуле строятся глобальные слои  $\Gamma^{(s)}(x)$ ,  $\Gamma^{(u)}(x)$ .

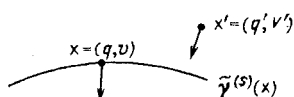


Рис. 16.8

В данном случае они называются *орициклами*, в многомерном случае *орисферами*.

Полезно также представить себе вид мер  $\bar{V}_{\gamma^{(u)}(x)}$ ,  $\bar{V}_{\gamma^{(s)}(x)}$ . Поскольку мы начали описание со слоев  $\gamma^{(s)}(x)$ , то мы построим меры  $\bar{V}_{\gamma^{(u)}(x)}$ . Их построение совершенно аналогично построению мер  $\bar{V}_{\gamma^{(u)}(x)}$ , следует только  $t \rightarrow \infty$  заменить на  $t \rightarrow -\infty$  и наоборот.

Введем сейчас коэффициент сжатия  $\alpha^{(s)}(x)$ , аналогичный введенному выше коэффициенту растяжения. Возьмем малую дугу  $\gamma^{(s)}(x)$  и ее сдвиг  $S^t \gamma^{(s)}(x)$ . Если  $l(\cdot)$  — длина кривой, стоящей в скобках, то  $l(S^t \gamma^{(s)}(x)) < l(\gamma^{(s)}(x))$  при  $t > 0$ .

Определение 4. *Локальным коэффициентом сжатия  $\alpha^{(s)}(x)$  называется предел*

$$\lim_{l(\gamma^{(u)}(x)) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{l(\gamma^{(s)}(x)) - l(S^t \gamma^{(s)}(x))}{l(\gamma^{(s)}(x)) t} = \alpha^{(s)}(x).$$

Если в этом определении заменить  $\gamma^{(s)}(x)$  на  $\gamma^{(u)}(x)$  и  $t$  на  $-t$ , то мы получим определение локального коэффициента растяжения  $\alpha^{(u)}(x)$ .

Аналогичные определения можно ввести в многомерном случае. Можно показать, что  $\alpha^{(s)}(x)$ ,  $\alpha^{(u)}(x)$  строго положительны и удовлетворяют условию Гёльдера, но слишком большой гладкости от них ожидать нельзя даже в случае аналитических метрик. Если в двумерном случае кривизна постоянна и равна  $-K$ , то  $\alpha^{(s)}(x) = \alpha^{(u)}(x) = \sqrt{K}$ . В общем случае  $-\alpha^{(s)}(x)$  равен геодезической кривизне кривой  $\tilde{\gamma}^{(s)}(x)$  с оснащением  $\gamma^{(s)}(x)$ .

Вернемся теперь к  $\gamma^{(s)}(x)$ . Для любого  $y \in \gamma^{(s)}(x)$  напомним формальное выражение  $A(y) = \exp \left\{ \int_0^\infty \alpha^{(s)}(S^t y) dt \right\}$ . Ясно, что

$$\text{существует} \quad \pi^{(s)}(y'; y'') = A(y') (A(y''))^{-1} = \exp \left\{ \int_0^\infty (\alpha^{(s)}(S^t y') - \right.$$

$\left. - \alpha^{(s)}(S^t y'')) dt \right\}$ . Тогда плотность меры  $\bar{V}_{\gamma^{(u)}(x)}$  (относительно длины) пропорциональна  $\pi^{(s)}(y; x)$ . Аналогично строится  $\bar{V}_{\gamma^{(u)}(x)}$ , и вся конструкция непосредственно обобщается на  $n$ -мерные компактные многообразия отрицательной кривизны.

Геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны служат основным примером так называемых потоков Аносова (см. 6°).

3. В случае 2. п. на  $m$ -мерных многообразиях отрицательной кривизны  $\dim \Gamma^{(s)}(x) = \dim \Gamma^{(u)}(x) = m - 1$ . Если обратиться теперь к потокам реперов на таких многообразиях (см. начало этой лекции), то размерность фазового пространства будет здесь значительно больше, чем  $2m - 1$ , а размерности у. м. и н. м. останутся без изменения. Эти многообразия получаются путем «поднятия» у. м. и н. м. геодезических потоков в пространство реперов.

4. Двумерные рассеивающие бильярды (см. 7°). Рассмотрим область  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченную конечным числом строго вогнутых внутрь дуг, не обязательно односвязную (см. примеры на рис. 16.9). Бильярды в таких областях называются рассеивающими. Аналогично геодезическим потокам на поверхностях отрицательной кривизны для почти каждой точки  $x = (q, v)$  найдется окрестность  $\mathcal{U}$  точки  $q$  такая, что для каждой точки  $q' \in \mathcal{U}$  можно построить  $x' = (q', v')$  так, что полутраектории точек  $x$  и  $x'$  сближаются с экспоненциальной скоростью. Ортогональные траектории пучков таких траекторий порождают, как и в случае г. п., локальные слои  $\gamma^{(s)}(x)$ ,  $\gamma^{(u)}(x)$  (рис. 16.10). Так же как и для г. п., вводятся

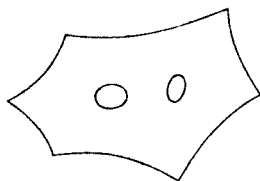


Рис. 16.9

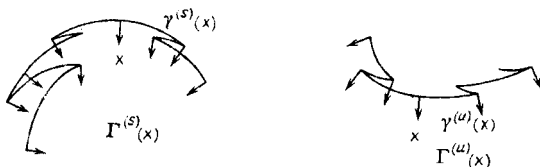


Рис. 16.10

локальные коэффициенты сжатия и растяжения, и с их помощью определяются меры  $\bar{V}_{\gamma^{(s)}(x)}$ ,  $\bar{V}_{\gamma^{(u)}(x)}$ .

5. *Аттрактор Лози*. Л. н. м. были построены в работе М. Мисоровича [4] при некоторых условиях типа неравенств на коэффициенты преобразования. Так как оно кусочно-линейно, то л. н. м. представляют собой прямолинейные отрезки.

6. Еще проще строятся л. н. м. для отображения Белых. Они представляют собой вертикальные отрезки.

7. В случае системы Лоренца л. н. м. строятся только численно. Это построение можно довести до уровня «машинных доказательств», но последовательно это не было проделано. Численные результаты показывают, что л. н. м. представляют собой кривые, идущие под небольшим углом к горизонтальной оси (см. рис. 16.6). Заметим, что длины л. н. м. ведут себя крайне нерегулярным образом, в частности всюду разрывны.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Геодезические потоки как объект эргодической теории изучались еще в работах Адамара и Биркгофа. По поводу геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны см., например,

[1] Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие динамические системы // УМН.—1967.—Т. 22, № 5.—С. 107—172.

[2] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. института им. В. А. Стеклова.—1967.—Т. 90.—210 с.

и имеющиеся там ссылки на более ранние работы.

Эргодические свойства потоков реперов обсуждаются в работе

[3] Brin M. I., Gromov M. On the ergodicity of Frame Flows // Math. Invent.—1980.—V. 60, № 1.—P. 1—8.

2° По поводу определения бильярдов см.

[4] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука. 1980.

3° Отображение Лози с точки зрения его гиперболических свойств исследовалось в работе

[5] Misiurewicz M. Strange Attractors for the Lozi Mappings // Annals of the New York Academy of Sciences.—1980.—V. 357.—P. 348—358.

По поводу отображения Эно см. недавнюю работу

[6] Benedicks M., Carleson L. The Dynamics of the Henon Map // Ann. of Math. (in press).

4° Свойства отображения Белых обсуждаются в статье

[7] Белых В. Н. Модели дискретных систем фазовой синхронизации // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной.—М.: Радио и связь, 1981.—С. 161—176.

5° Система Лоренца появилась в его работе

[8] Lorenz E. Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atm. Sciences.—1963.—V. 20.—P. 130—141.

Эта работа приобрела очень большую популярность в середине семидесятых годов. Благодаря этой работе идея странных аттракторов, введенная Рюзллем и Такенсом в их статье

[9] Ruelle D., Takens. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys.—1971.—V. 20, № 3.—P. 167—192, стала чрезвычайно широко распространенной среди физиков, биологов, химиков и т. д.

Наше описание модели Лоренца основано на работах

[10] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. // О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР.—1977.—Т. 234, № 2.—С. 336—339;

[11] О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды Моск. матем. общества.—1983.—Т. 44.—С. 150—212.



6° Теорию систем Аносова см. в его книге, упомянутой в 1°, а также

[12] Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms // Lecture Notes in Math. V.—Berlin: Springer-Verlag.—1975.—V. 470.

[13] Ruelle D. Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems // Publ. Math. IHES.—1979.—V. 50.—P. 27—58.

[14] Ruelle D. Thermodynamic Formalism. Encyclopedia of Math. and its Appl.—Vol. 5.—Addison-Wesley: Reading Mass, 1978.

7° По поводу рассеивающих бильярдов и их обобщений см.

[15] Sinai Ya. G. Hyperbolic Billiards // Труды Международного Математического конгресса в Киото, 1990 (в печати) и приведенную там библиографию.

## ЛЕКЦИЯ 17

### СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ. ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ

Содержание предыдущей лекции уже показало важность понятий л.у.м., у.м. и л.н.м., н.м. Сейчас мы обсудим проблему существования таких многообразий. Вначале рассмотрим кусочно-гладкие диффеоморфизмы  $T$ . Пусть  $x \in M$  такова, что  $T^n$  гладко в окрестности точки  $x$  при любом  $n$ , что означает, что траектория  $T^n x = x_n$  не проходит через край  $\partial M$ . Тогда можно определить дифференциал  $\partial T_{x_n}$  диффеоморфизма  $T$  отображений касательного пространства  $\mathcal{T}_{x_n}$  в точке  $x_n$  в касательное пространство  $\mathcal{T}_{Tx_n}$  в точке  $Tx_n$ . Мы введем сейчас важное понятие гиперболической траектории.

Предположим, что каждое касательное пространство  $\mathcal{T}_{T^k x}$ ,  $0 \leq k < \infty$ , допускает разложение  $\mathcal{T}_{T^k x} = E_{T^k x}^{(s)} + E_{T^k x}^{(u)}$  такое, что

$$1) \quad \partial T_{T^k x}(E_{T^k x}^{(s)}) = E_{T^{k+1} x}^{(s)}; \quad \partial T_{T^k x}(E_{T^k x}^{(u)}) = E_{T^{k+1} x}^{(u)}$$

(инвариантность);

2) при некоторой постоянной  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,

$$\|\partial T_{T^k x} e\| \leq \lambda \|e\|, \quad e \in E_{T^k x}^{(s)};$$

$$\|\partial T_{T^k x} e\| \geq \lambda^{-1} \|e\|, \quad e \in E_{T^k x}^{(u)};$$

(гиперболичность);

3) при некоторой постоянной  $\alpha > 0$

$$\text{dist}(E_{T^k x}^{(s)}, E_{T^k x}^{(u)}) \geq \alpha, \quad 0 < k < \infty.$$

В 2) предполагается, что норма индуцируется какой-либо кусочно  $C^\infty$ -гладкой метрикой в  $M$ . Расстояние между подпространствами в 3) также индуцировано этой метрикой.

Аналогичным образом можно ввести 1) — 3) при  $-\infty < k \leq 0$ .

**Определение 1'.** Точка  $x$  называется  $\alpha$ -гиперболической, если она удовлетворяет 1) — 3) при  $0 \leq k < \infty$ .

**Определение 1''.** Точка  $x$  называется  $\omega$ -гиперболической, если она удовлетворяет 1) — 3) при  $0 \leq k < \infty$ .

**Определение 1.** Точка  $x$  называется гиперболической, если она является  $\alpha$ - и  $\omega$ -гиперболической.

В случае отображений, имеющих аттракторы, естественно рассматривать только  $\alpha$ -гиперболические точки.

Имеет место следующая теорема, являющаяся частным случаем так называемой общей теоремы Адамара — Перрона.

**Теорема 1.** Пусть вдоль полутраектории  $\{T^n x, n \geq 0\}$   $\alpha$ -гиперболической точки  $x$  выполнено следующее условие: при некоторых  $C > 0$ ,  $\rho > 0$  отображение  $T^{-1}$  является гладким в окрестности точки  $T^n x$  радиуса  $C \cdot n^{-\rho}$ , причем производные  $T^{-1}$  до третьего порядка включительно в этой окрестности не превосходят по абсолютной величине  $C \cdot n^{\rho}$ . Тогда через точку  $x$  проходит л.н.и.  $\gamma^{(u)}(x)$  класса  $C^2$ , касательная плоскость к которому в точке  $x$  есть  $E_x^{(u)}$ , и тем самым  $\dim \gamma^{(u)}(x) = \dim E_x^{(u)}$ .

Если аналогичное условие выполнено для полутраектории  $\{T^n x, n \leq 0\}$ , то существует л.у.м.  $\gamma^{(s)}(x)$  с такими же свойствами.

Требования гиперболичности и условия теоремы могут быть значительно ослаблены (неравномерная гиперболичность, см. [1], а также [2], [3]). Подчеркнем, однако, что для построения одного из слоев  $\gamma^{(u)}(x)$  или  $\gamma^{(s)}(x)$  требуется существование обоих подпространств  $E_{T^n x}^{(s)}$  и  $E_{T^n x}^{(u)}$ . Отметим также, что описанное условие гиперболичности носит локальный характер в том смысле, что оно относится к траектории точки.

Определение гиперболичности естественно вводится и в случае потоков. Теорема Адамара — Перрона показывает, что подпространства  $E_x^{(s)}$ ,  $E_x^{(u)}$  — это касательные пространства к локальным слоям  $\gamma^{(s)}(x)$ ,  $\gamma^{(u)}(x)$ . С помощью этой теоремы их можно построить в примерах, рассмотренных в лекции 16.

Вернемся к общей ситуации лекции 16. Предположим, что мы имеем борелевское подмножество  $M_0 \subset M$ , инвариантное относительно кусочно-гладкого диффеоморфизма  $T$ , причем каждая точка  $x \in M_0$  имеет н.м.  $\Gamma^{(u)}(x)$ , на котором задана  $\sigma$ -конечная мера  $\nu_{\Gamma^{(u)}(x)}$  так, что семейство мер  $\{\nu_{\Gamma^{(u)}}\}$  образует инвариантное семейство (см. определение 3 лекции 16). Далее мы будем рассматривать измеримые разбиения  $\xi$ , элементы  $C_\xi(x)$  которых представляют собой борелевские подмножества

л. н. м.  $\gamma^{(u)}(x)$ , т. е. элемент  $C_\xi(x)$  разбиения  $\xi$ , содержащий  $x$ , таков, что  $C_\xi(x) \subset \gamma^{(u)}(x)$ .

**Определение 2.** Вероятностная мера  $\mu$  на  $(M, \mathcal{M})$  называется гиббсовской мерой по отношению к инвариантному семейству  $\{v_{\Gamma^{(u)}}\}$  (или  $v_{\Gamma^{(u)}}$ -гиббсовской), если для любого описанного выше измеримого разбиения  $\xi$  условные меры  $\mu(\cdot | C_\xi(x))$  имеют вид

$$\mu(A | C_\xi(x)) = \frac{\int_{A \cap C_\xi(x)} dv_{\Gamma^{(u)}(x)}(y)}{\int_{C_\xi(x)} dv_{\Gamma^{(u)}(x)}(y)}.$$

В статистической механике знаменатель последнего выражения называется статистической суммой. Определение 2 имеет много общего с определением так называемых DLR-состояний в статистической механике.

**Теорема 2.** Если для данного инвариантного семейства мер  $\{v_{\Gamma^{(u)}}\}$  гиббсовская мера единственна, то она инвариантна относительно  $T$ .

**Доказательство.** Пусть  $\xi$  — измеримое разбиение, для которого  $C_\xi(x) \subset \gamma^{(u)}(x) \pmod{0}$ . Тогда  $T^{-1}\xi$  обладает тем же свойством. Имеем теперь в силу инвариантности семейства мер  $v_{\Gamma^{(u)}}$

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}A) &= \int_{M|T^{-1}\xi} \mu(T^{-1}A | C_{T^{-1}\xi}) d\mu(C_{T^{-1}\xi}) = \\ &= \int_{M|T^{-1}\xi} \frac{v_{\Gamma^{(u)}}(T^{-1}A \cap C_{T^{-1}\xi})}{v_{\Gamma^{(u)}}(C_{T^{-1}\xi})} d\mu(C_{T^{-1}\xi}) = \\ &= \int_{M|\xi} \frac{v_{\Gamma^{(u)}}(A \cap C_\xi)}{v_{\Gamma^{(u)}}(C_\xi)} d\tilde{\mu}(C_\xi), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mu}$  — индуцированная мера на фактор-пространстве  $M|\xi$ , т. е.  $\tilde{\mu}(B) = \mu(T^{-1}B)$  для любого  $B \in \mathcal{M}(\xi)$ . Напомним, что  $\mathcal{M}(\xi)$  есть  $\sigma$ -алгебра подмножеств, состоящих  $\pmod{0}$  из элементов разбиения  $\xi$ . Последнее соотношение показывает, что  $\mu_1(A) = \mu(T^{-1}A)$  также является гиббсовской мерой относительно семейства мер  $\{v_{\Gamma^{(u)}}\}$ . В силу единственности  $\mu_1 = \mu$ . Теорема 2 доказана.

Фиксируем какое-либо измеримое разбиение  $\eta$ , элементы которого  $C_\eta(x) \subset \gamma^{(u)}(x)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $T$  имеет инвариантную меру  $\mu$ , причем

1) условные меры  $\mu(\cdot | C_\eta(x))$  эквивалентны мере  $\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}$ , где, напомним,  $\sigma_{\gamma^{(u)}}$  — гладкая мера на  $\gamma^{(u)}$ , индуцированная римановым объемом;

2)  $\mu\{y | \text{dist}_{\gamma^{(u)}(y)}(y, \partial C_\eta(y)) \leq \alpha\} \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Тогда  $\mu$  есть  $V_{\Gamma^{(u)}}$ -гиббсовская мера по отношению к инвариантному семейству мер  $\{V_{\Gamma^{(u)}}\}$ , построенному в предыдущей лекции.

Доказательство. Мы установим, что условные меры на элементах  $C_\eta(x)$  определяются формулой

$$\mu(A | C_\eta(x)) = \frac{\int_{A \cap C_\eta(x)} dV_{\Gamma^{(u)}(x)}(y)}{\int_{C_\eta(x)} dV_{\Gamma^{(u)}(x)}(y)},$$

что, как нетрудно видеть, достаточно для наших целей.

Обозначим через  $\rho(\cdot)$  плотность, о которой идет речь в 1), т. е.

$$\mu(A | C_\eta(x)) = \frac{\int_{A \cap C_\eta(x)} \rho(y) d\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(y)}{\int_{C_\eta(x)} \rho(y) d\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(y)}.$$

Рассмотрим разбиение  $\eta_n = T^{-n}\eta$ , элементы которого имеют вид  $T^{-n}C_\eta(T^n x) = C_{\eta_n}(x)$ . Тогда если  $C_{\eta_n}(x) \subset \gamma^{(u)}(x)$ , то

$$\mu(A | C_{\eta_n}(x)) = \frac{\int_{A \cap C_{\eta_n}(x)} \rho(y) d\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(y)}{\int_{C_{\eta_n}(x)} \rho(y) d\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(y)}.$$

Поскольку  $\text{diam } C_{\eta_n}(x) \rightarrow 0$  по мере при  $n \rightarrow \infty$ , то из общих теорем теории меры следует, что  $\mu(A | C_{\eta_n}(x))$  сколь угодно мало отличается (по мере) от  $\sigma(A \cap C_{\eta_n}(x)) / \sigma(C_{\eta_n}(x))$ , которое получилось бы в случае  $\rho(y) \equiv \text{const}$  на  $C_{\eta_n}(x)$ . Поэтому для любого  $A$

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu(T^{-n}A) &= \int_{M_0 | \eta_n} d\mu \int_{T^{-n}A \cap C_{\eta_n}} \rho(y) d\sigma_{C_{\eta_n}}(y) \times \\ &\times \left( \int_{C_{\eta_n}} \rho(y) d\sigma_{C_{\eta_n}}(y) \right)^{-1} \sim \int_{M_0 | \eta_n} d\mu \cdot \frac{\sigma(T^{-n}A \cap C_{\eta_n})}{\sigma(C_{\eta_n})}. \end{aligned}$$

По определению последнее выражение равно (см. обозначения предыдущей лекции)

$$\int_{M_0 | \eta} d\mu \frac{V^{(n)}(A \cap C_\eta)}{V^{(n)}(C_\eta)}.$$

Устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получаем требуемый результат. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 показывает, что проверка того, что данная инвариантная мера является  $\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}$ -гиббсовской, сводится к проверке условия 1) этой теоремы, поскольку условие 2) является простым и его проверка не вызывает трудностей.

**Определение 3.** Пусть дана вероятностная мера  $\mu$ . Если для любого измеримого разбиения  $\eta$  такого, что  $C_\eta(x) \subset \gamma^{(u)}(x)$ , условные меры  $\mu(\cdot | C_\eta(x))$  абсолютно непрерывны относительно  $\sigma_{\gamma^{(u)}}(x)$ , то мы будем называть меру  $\mu$   $\sigma^{(u)}$ -абсолютно непрерывной.

Для точки  $x \in M_0$  рассмотрим открытое подмногообразие  $D$ , гомеоморфное открытому шару, причем  $D \subset \gamma^{(u)}(x)$ . Пусть  $\dim \gamma^{(u)}(x) = \dim D = k$ . Проведем через  $x$   $(r-k)$ -мерное открытое подмногообразие  $D'$ , трансверсальное к  $\gamma^{(u)}(x)$ , где  $r = \dim M$ , и обозначим  $D'_0 = D' \cap M_0$ . Допустим теперь, что каждая точка  $y \in D$  имеет  $(r-k)$ -мерное л. у. м.  $\gamma^{(s)}(y)$ , и предположим, что для каждого  $z \in D'_0$  формула

$$\gamma^{(s)}(y) \cap \gamma^{(u)}(z)$$

устанавливает гомеоморфизм  $\pi_z$ , отображающий  $D$  на открытое подмногообразие  $D(z) \subset \gamma^{(u)}(z)$  (рис. 17.1).

**Определение 4.** Отображение  $\pi_z: D \rightarrow D(z)$  называется каноническим изоморфизмом л. н. м. (см. [4], [5], [6]).

**Определение 5.** Канонический изоморфизм называется абсолютно непрерывным, если он переводит меру  $\sigma_{\gamma^{(u)}}$  на  $D$  в меру, эквивалентную мере  $\sigma_{\gamma^{(u)}}$  на  $D(z)$ .

Мы сейчас увидим, какую роль играют абсолютно непрерывные канонические изоморфизмы. Предположим, что  $M = M_0$ ,  $T - C^3$ -диффеоморфизм  $M$ , и  $\mu$  — абсолютно не-

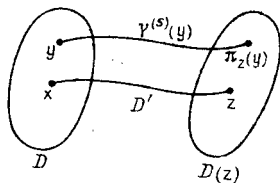


Рис. 17.1

прерывная инвариантная относительно  $T$  мера и  $\mu$ -почти каждая точка  $x$  имеет л. у. м.  $\Gamma^{(s)}(x)$ , н. м.  $\Gamma^{(u)}(x)$ , и мы можем построить меры  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$ ,  $\nu_{\Gamma^{(s)}}$ . Возьмем какую-либо точку  $x_0$ , для которой существуют  $\gamma^{(u)}(x_0)$ ,  $\gamma^{(s)}(x_0)$ , и для точки  $z \in \gamma^{(s)}(x_0)$ , имеющей  $\Gamma^{(u)}(z)$ , обозначим сейчас через  $\gamma^{(u)}(z)$  подмножество  $\Gamma^{(u)}(z)$ , канонически изоморфное  $\gamma^{(u)}(x_0)$ . Образует множество

$\bigcup_z \gamma^{(u)}(z) = U$ . Оно состоит из пересечений

$\gamma^{(s)}(z_1) \cap \gamma^{(u)}(z)$ ,  $z_1 \in \gamma^{(u)}(x_0)$ , и обладает тем свойством, что для него существует  $\gamma^{(s)}(z_1)$ , пересекающее все  $\gamma^{(u)}(z)$ . Можно

сказать, что  $\mathcal{U} = \bigcup_{z_1, z} (\gamma^{(s)}(z_1) \cap \gamma^{(u)}(z))$ . Поэтому  $\mathcal{U}$  допускает разбиения  $\xi^{(u)}$ ,  $\xi^{(s)}$ , где  $\xi^{(u)}$  есть разбиение на  $\gamma^{(u)}(z)$ , а  $\xi^{(s)}$  есть разбиение, элементами которого служат пересечения  $\gamma^{(s)}(z_1) \cap \mathcal{U}$ . Допустим, что  $\mu$  является одновременно  $\sigma^{(u)}$ -абсолютно непрерывной и  $\sigma^{(s)}$ -абсолютно непрерывной. Для любого борелевского  $A \subset \gamma^{(u)}(z_0)$  обозначим  $C_A = \bigcup_{z \in \gamma^{(u)}(x_0)} \pi_z(A) \subset \mathcal{U}$  и положим  $v_1(A) = \mu(C_A)$ . Тогда  $v_1(A)$  есть мера на  $\gamma^{(u)}(x_0)$ .

**Теорема 4.** Мера  $v_1$  абсолютно непрерывна относительно  $\sigma_{\gamma^{(u)}(x_0)}$ .

**Доказательство.** Мы можем вычислить  $v_1(A)$  следующим образом:

$$v_1(A) = \int_{M|\xi^{(u)}} d\mu(\gamma^{(u)}(z)) \int_{\pi_z(A) \cap \gamma^{(u)}(z)} \rho(y) d\sigma_{\gamma^{(u)}}(y).$$

Если  $\sigma_{\gamma^{(u)}(z_0)}(A) = 0$ , то в силу того, что канонический изоморфизм абсолютно непрерывен,  $\sigma_{\gamma^{(u)}(z)}(\pi_z(A) \cap \gamma^{(u)}(z)) = 0$ . Следовательно,  $v_1(A) = 0$ , что и требовалось доказать.

Вернемся к проблемам существования и единственности инвариантных относительно  $T$  гиббсовских мер. Обе проблемы имеют ту же природу, что и проблемы существования и единственности гиббсовских мер в статистической механике. Мы рассмотрим вначале проблему существования и проведем рассуждения при некоторых упрощающих предположениях. Распространение их на более общий случай требует незначительных усилий при том же ходе рассуждений.

Пусть  $\dim \gamma^{(u)}(x) = k$  для всех  $x \in M_0$ . Допустим, что  $M_0$  можно покрыть конечным числом открытых шаров  $\mathcal{U}_i$  с центрами в  $x_i$ , через каждую точку  $x_i$  провести  $(r-k)$ -мерное подмногообразие  $\gamma_i$ , гомеоморфное шару, и при этом

1) для  $x \in M_0 \cap \gamma_i$  в качестве л. н. м. можно взять  $\gamma^{(u)}(x) \subset \mathcal{U}_i$ ,  $\partial \gamma^{(u)}(x) \subset \partial \mathcal{U}_i$ ;

2) для любого  $x \in M_0$  можно найти такое л. н. м.  $\gamma^{(u)}(x)$ , что пересечение  $\gamma^{(u)}(x) \cap \gamma_i$  состоит из одной точки;

3) для любой непрерывной функции  $f(x)$ , равной нулю вне

$\mathcal{U}_i$ , интеграл  $\frac{\int_{\gamma^{(u)}(x)} f(y) d\bar{v}_{\Gamma^{(u)}}(y)}{\int_{\gamma^{(u)}(x)} d\bar{v}_{\Gamma^{(u)}}(y)}$  представляет собой непрерывную

функцию  $x \in \gamma_i$ . Здесь  $\{\bar{v}_{\Gamma^{(u)}}\}$  есть инвариантное семейство мер, построенных в лекции 16.

**Теорема 5.** Если выполнены условия 1) и 2), то хотя бы одна инвариантная относительно  $T$  мера, гиббсовская по отношению к семейству  $\{\bar{\nu}_{\Gamma^{(n)}}\}$ , существует.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное л. у. м.  $\gamma^{(u)} \subset \Gamma^{(u)}$  и возьмем в качестве начальной меры  $\mu_0$  вероятностную меру, сосредоточенную на  $\gamma^{(u)}$  и имеющую вид  $\frac{1}{\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}(\gamma^{(u)})} \bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}(\cdot)$ . Тогда  $(T^{-n})^* \mu_0 = \mu_n$  сосредоточена на  $T^n \gamma^{(u)}$ .

Поскольку  $T^{-n} \gamma^{(u)}$  можно представить как объединение л. н. м.  $\gamma^{(u)}(y_j^{(n)})$ , то  $T^{-n} \gamma^{(u)} \cap \gamma_i$  состоит из конечного числа точек. Для каждой точки  $z_k \in T^{-n} \gamma^{(u)} \cap \gamma_i$  такой, что  $z_k \in \gamma^{(u)}(z_k) \subset T^{-n} \gamma^{(u)}$ , положим  $\bar{\mu}(z_k) = \frac{1}{\bar{\nu}_{T^{-n}\Gamma^{(u)}}(T^{-n} \gamma^{(u)})} \times \bar{\nu}_{T^{-n}\Gamma^{(u)}}(\gamma^{(u)}(z_n))$ . Набор чисел  $\bar{\mu}_n(z_k)$  задает дискретную меру  $\bar{\mu}_n^{(i)}$  на  $\gamma_i$ . Ясно, что  $\bar{\mu}_n(\gamma_i) \leq 1$ . Положим  $\lambda_i = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^t \mu_n$ ,  $\bar{\lambda}^{(i)}$  — соответствующая мера на  $\gamma_i$ . Выберем теперь подпоследовательность  $\{t_k\}$  так, чтобы

- 1)  $\lambda_{t_k} \Rightarrow \lambda$  в слабой топологии при  $k \rightarrow \infty$ ;
- 2) при всех  $i$  меры  $\bar{\lambda}_{t_k}^{(i)}$  сходятся в слабой топологии к некоторым мерам  $\bar{\lambda}^{(i)}$  на  $\gamma_i$ .

По построению  $\lambda$  инвариантна относительно  $T$ . Покажем, что  $\lambda$  является гиббсовской мерой по отношению к инвариантному семейству мер  $\bar{\nu}_{\Gamma^{(n)}}$ . Возьмем какое-либо разбиение  $\xi$ , для которого  $C_\xi(x) \subset \gamma^{(u)}(x) \subset U_i$  при некотором  $i$ . Для любой непрерывной функции  $f$ , сосредоточенной на множестве тех  $u \in U_i$ , для которых  $\gamma^{(u)}(y) \cap \gamma_i \subset U_i$ , мы можем написать

$$\int f(x) d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \sum_{s=1}^{t_k} \int_{T^{-s} \gamma^{(u)}} f(x) d\bar{\nu}_{T^{-s}\Gamma^{(u)}}(x) (\bar{\nu}_{T^{-s}\Gamma^{(u)}}(T^{-s} \gamma^{(u)}))^{-1}. \quad (1)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & (\bar{\nu}_{T^{-s}\Gamma^{(u)}}(T^{-s} \gamma^{(u)}))^{-1} \cdot \int_{T^{-s} \gamma^{(u)}} f(x) d\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}(x) = \\ &= \sum_m \bar{\mu}_s(z_m) \cdot \frac{1}{\bar{\mu}_s(z_m)} \cdot \int_{T^{-s} \gamma^{(u)} \cap \gamma^{(u)}(z_m)} f(x) d\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}(x) = \\ &= \sum_m \bar{\mu}_s(z_m) \cdot \left( \int_{\gamma^{(u)}(z_m)} d\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}(y) \right)^{-1} \int_{\gamma^{(u)}(z_m)} d\bar{\nu}_{\Gamma^{(u)}}(y) f(y). \quad (2) \end{aligned}$$

По предположению произведение

$$\left( \int_{\gamma^{(u)}(z)} d\bar{v}_{\Gamma^{(u)}(z)}(y) \right)^{-1} \cdot \int_{\gamma^{(u)}(z)} d\bar{v}_{\Gamma^{(u)}(z)}(y) f(y) = h(z)$$

есть непрерывная функция  $z \in \gamma_i$ . Поэтому на основании (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_k} \sum_{s=1}^{t_k} \int_{T^{-s}\gamma^{(u)}} f(x) d\bar{v}_{T^{-s}\Gamma^{(u)}}(x) (\bar{v}_{T^{-s}\Gamma^{(u)}}(T^{(-s)}\gamma^{(u)}))^{-1} = \\ = \sum_{z_m} \bar{\lambda}_{i_k}^{(i)}(z_m) \cdot h(z_m). \end{aligned}$$

Здесь  $\{z_k\}$  — носитель меры  $\bar{\lambda}_{i_k}^{(i)}$ . В силу выбора подпоследовательности  $t_k$  последнее выражение сходится к

$$\int_{V_i} d\bar{\lambda}^{(i)}(z) h(z) = \int_{V_i} d\bar{\lambda}^{(i)}(z) \left( \int_{\gamma^{(u)}(z)} d\bar{v}_{\Gamma^{(u)}(z)}(y) \right)^{-1} \int_{\gamma^{(u)}} f(y) d\bar{v}_{\Gamma^{(u)}}(y).$$

Но это и означает, что мера  $\bar{\lambda}$  гиббсовская. Теорема 5 доказана.

Аналогичная теорема может быть доказана для потоков.

Как мы уже подчеркивали, теорема 5 вполне аналогична теореме существования гиббсовских состояний в статистической механике. Теперь мы займемся проблемой единственности, которая в статистической механике связана с проблемой фазовых переходов. В нашей ситуации фазовых переходов, как правило, не возникает, поскольку она соответствует одномерной статистической механике с быстро убывающим взаимодействием.

Допустим, что множество  $M_0$  можно покрыть конечным числом открытых областей  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq I$ ,  $M_0 \subset \bigcup_{i=1} U_i$ , в каждом подмножестве  $U_i$  выбрать точку  $z_i$ , ее л. н. м.  $\gamma^{(u)}(z_i)$  и трансверсальное подмногообразие  $\gamma_i$ . При этом для  $z \in \gamma_i \cap M_0$  существует л. н. м.  $\gamma^{(u)}(z)$ , канонически изоморфное  $\gamma^{(u)}(z_i)$  и  $U_i \cap M_0 = \bigcup \gamma^{(u)}(z)$ . Далее, все канонические изоморфизмы абсолютно непрерывны и

1) найдется такое  $m$ , что любое  $T^m \gamma^{(u)}(y)$ ,  $y \in M_0$ , содержит хотя бы одно  $\gamma^{(u)}(z) \subset U_i$  при всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq I$ ;

2) любое  $\gamma^{(u)}(z)$  допускает представление  $\gamma^{(u)}(z) = \bigcup_k \hat{\gamma}_k^{(u)}$ ,

причем для каждого  $k$  найдется такое  $n_k$ , что  $T^{n_k} \hat{\gamma}_k^{(u)}$  есть один из слоев  $\gamma^{(u)}(z)$ ,  $z \in U_i$ .

Свойство абсолютной непрерывности канонического изоморфизма выполняется при достаточно общих условиях.



Обычный путь его доказательства состоит в следующем. Пусть  $A \subset \gamma^{(u)}(z)$  и  $A' = \pi_{(z)}(A)$ , причем  $A$  есть множество с кусочно-гладкой границей. Тогда  $T^n A$  и  $T^n A'$  поточечно сближаются друг с другом. Дополнительные рассуждения требуются для доказательства того, что сближение происходит также в  $C^2$ -топологии. Но если это уже так, то мы берем шар  $D$  фиксированного радиуса  $\varepsilon > 0$  на  $T^n A$  и его канонический образ  $D' \subset T^n A'$ . В силу сказанного объемы  $D$  и  $D'$  близки. После этого мы вычисляем меры  $v_{\gamma^{(u)}(z)}^{(n)}(T^{-n}D)$  и  $v_{\gamma^{(u)}(z')}^{(n)}(T^{-n}D')$  и убеждаемся, что отношения  $v_{\gamma^{(u)}(z)}^{(n)}(T^{-n}D)/\sigma_{\gamma^{(u)}(z)}(T^{-n}D)$  и  $v_{\gamma^{(u)}(z')}^{(n)}(T^{-n}D')/\sigma_{\gamma^{(u)}(z')}(T^{-n}D')$  равномерно ограничены сверху и снизу положительными постоянными. Это и дает требуемую абсолютную непрерывность. Подробности см., например, в [4], [6].

Условия 1) и 2), с одной стороны, чисто геометрические, а с другой стороны, имеют тот же характер, что и условия эргодичности в теории цепей Маркова.

**Теорема 6.** *При описанных выше условиях и при условиях теоремы 5  $\bar{v}^{(u)}$ -гиббсовская мера, которая строится в теореме 5, единственна.*

Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Мы опишем только основные шаги. Вначале мы замечаем, что для любых двух  $\gamma^{(u)}(z_1), \gamma^{(u)}(z_2) \in U_i$  отвечающие им меры  $\mu_n$  (см. доказательство теоремы 5) сближаются друг с другом. Этот факт устанавливается одновременно с доказательством абсолютной непрерывности канонического изоморфизма.

Второй шаг состоит в том, что если  $\gamma^{(u)}(z_1) \in U_{i_1}, \gamma^{(u)}(z_2) \in U_{i_2}$ , то соответствующие меры  $\lambda_i$  (см. доказательство теоремы 5) сближаются. При этом используется условие 2), из которого следует, что  $\mu_n$ , отвечающая  $\hat{\gamma}_k^{(u)} \subset \gamma^{(u)}(z_2)$ , сближается с  $\mu_{n-n_k}$ , отвечающей  $\gamma^{(u)}(z_1) \in U_{i_1}$ . Подробности мы опускаем.

Приведенные рассуждения нетрудно распространить и на случай потоков.

**Примеры.** 1. Рассмотрим геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны (см. лекцию 16). У.м. и н.м. представляют собой оснащения орисфер (орициклов в двумерном случае). Меры  $v_{\Gamma^{(u)}}$ ,  $v_{\Gamma^{(s)}}$  строятся по общему рецепту. Они эквивалентны риманову объему на  $\Gamma^{(u)}$  и  $\Gamma^{(s)}$ , а в случае постоянной отрицательной кривизны совпадают с ним. Мера Лиувилля является  $v_{\Gamma^{(u)}}$ -гиббсовской и  $v_{\Gamma^{(s)}}$ -гиббсовской. Нетрудно показать, что такая мера единственна.

2. Для рассеивающих бильярдов справедливы такие же утверждения.

3. В кусочно-линейных отображениях Лози и Белых локальные многообразия являются прямолинейными сегмен-

тами. Меры  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$ ,  $\nu_{\Gamma^{(s)}}$  на них локально являются мерами Лебега. Построение  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$ -гиббсовских мер для отображения Лози было проведено в работе Колле и Леви [7], а для отображения Белых—в неопубликованных работах Песина и Сатаева.

4. Вся конструкция непосредственно применима к транзитивным диффеоморфизмам и потокам Аносова, где каждый из слоев  $\Gamma^{(u)}$ ,  $\Gamma^{(s)}$  всюду плотен (см. [5], [6], [8]).

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° По поводу теоремы Адамара—Перрона см.

[1] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. института им. В. А. Стеклова.—1967.—Т. 90.—210 с.

[2] Hirsch M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds // Lecture Notes in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1977.—V. 583.

[3] Динамические системы. Т. 2. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Под ред. Я. Г. Синая.—М.: Изд-во ВИНТИ, 1985.—310 с.

2° По поводу канонического изоморфизма см.

[4] Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие динамические системы // УМН.—1967.—Т. 22, № 5.—С. 107—172.

[5] Синай Я. Г. Марковские разбиения и  $Y$ -диффеоморфизмы // Функцион. анализ и его прил.—1968.—Т. 2, № 1.—С. 64—89.

[6] Katok A. B., Strelcyn J. Smooth maps with Singularities: invariant manifolds, entropy and billiards // Lect. Notes in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1987.—V. 1222.

[7] Collet P., Levy Y. Ergodic properties of the Lozi mappings // Comm. Math. Phys.—1984.—V. 93, № 4.—P. 461—482.

[8] Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН.—1972.—Т. 27, № 4.—С. 21—64.

## ЛЕКЦИЯ 18

### МАРКОВСКИЕ РАЗБИЕНИЯ, $n$ -ТЕОРЕМА, ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

Мы продолжаем изучение динамики на инвариантных множествах, в которых каждая точка имеет н.м. и у.м. Важным средством изучения таких систем является метод марковских разбиений и так называемый термодинамический формализм.

Марковские разбиения для одного важного частного случая уже появлялись в лекции 3. Сейчас мы введем соответствующие общие определения (см. [1], [2]). Вначале рассмотрим случай дискретного времени.

Пусть  $T$ —кусочно-гладкое обратимое отображение многообразия с краем  $M$ , для которого  $T^{-1}$  также кусочно-гладкое. Рассмотрим инвариантное подмножество  $M_0$ , у которого

каждая точка  $x \in M_0$  имеет н.м.  $\Gamma^{(u)}(x)$  и у.м.  $\Gamma^{(s)}(x)$ . При этом предполагается, что  $\Gamma^{(u)}(x) \subset M_0$ , а  $\Gamma^{(s)}(x)$  может и не принадлежать  $M_0$ .

В основе понятия марковского разбиения лежит понятие параллелограмма. Пусть для каждой точки  $x \in M_0$  выбраны каким-либо образом л.н.м.  $\gamma^{(u)}(x)$  и л.у.м.  $\gamma^{(s)}(x)$ . Как и в предыдущей лекции, фиксируем шар  $U \subset M$  и возьмем такие слои  $\gamma^{(u)}(x)$ ,  $\gamma^{(s)}(x)$ , что  $\partial\gamma^{(u)}(x) \subset \partial U$ ,  $\partial\gamma^{(s)}(x) \subset \partial U$ . Мы предположим, что  $U$  настолько мало, что  $\gamma^{(u)}(x) \cap \gamma^{(s)}(x) = x$  для всех  $x \in U \cap M_0$ . Для любого замкнутого подмножества  $\Pi \subset U$  обозначим

$$\gamma_{\Pi}^{(u)}(x) = \gamma^{(u)}(x) \cap \Pi, \quad \gamma_{\Pi}^{(s)}(x) = \gamma^{(s)}(x) \cap \Pi.$$

**Определение 1.** Подмножество  $\Pi \subset U$  называется параллелограммом, если для любых точек  $x', x'' \in \Pi$  пересечение  $\gamma_{\Pi}^{(u)}(x') \cap \gamma_{\Pi}^{(s)}(x'')$  не пусто и состоит из одной точки и для любой точки  $x \in \Pi$

$$\Pi = \bigcup_{\substack{x' \in \gamma_{\Pi}^{(u)}(x) \\ x'' \in \gamma_{\Pi}^{(s)}(x)}} \gamma_{\Pi}^{(u)}(x') \cap \gamma_{\Pi}^{(s)}(x'').$$

Смысл этого определения состоит в том, что для получения  $\Pi$  следует взять «образующие слои»

$$\gamma_{\Pi}^{(s)}(x) \subset \gamma^{(s)}(x), \quad \gamma_{\Pi}^{(u)}(x) \subset \gamma^{(u)}(x)$$

и через каждую точку  $x' \in \gamma_{\Pi}^{(u)}(x)$  провести  $\gamma^{(u)}(x')$ , через каждую точку  $x'' \in \gamma_{\Pi}^{(s)}(x)$  провести  $\gamma^{(s)}(x'')$ , и тогда  $\Pi$  будет состоять из всевозможных пересечений  $\gamma^{(u)}(x') \cap \gamma^{(s)}(x'')$ . В определении 1 не предполагается, что образующие множества  $\gamma_{\Pi}^{(u)}(x)$ ,  $\gamma_{\Pi}^{(s)}(x)$  открыты, связны и т. п. В принципе, они могут быть подмножествами любой природы. В приложениях встречаются ситуации, когда  $\gamma_{\Pi}^{(u)}(x)$ ,  $\gamma_{\Pi}^{(s)}(x)$  оказываются замкнутыми нигде не полными множествами положительной меры.

Для любого параллелограмма  $\Pi$  через  $\xi_{\Pi}^{(u)}$ ,  $\xi_{\Pi}^{(s)}$  обозначим разбиения  $\Pi$  на  $\gamma_{\Pi}^{(u)}$ ,  $\gamma_{\Pi}^{(s)}$  соответственно. При этом ясно, что различные элементы разбиения  $\xi_{\Pi}^{(u)}$  канонически изоморфны между собой (по поводу канонического изоморфизма см. предыдущую лекцию). В дальнейшем все встречающиеся параллелограммы предполагаются замкнутыми.

Если  $\Pi$  — параллелограмм и  $T$  непрерывно на  $\Pi$ , то  $TP$  — также параллелограмм. Если  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  — параллелограмм, то и  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  также параллелограмм. Действительно, возьмем  $x \in \Pi_1 \cap \Pi_2$  и образующие слои  $\gamma_{\Pi_1}^{(u)}(x)$ ,  $\gamma_{\Pi_1}^{(s)}(x)$  и  $\gamma_{\Pi_2}^{(u)}(x)$ ,  $\gamma_{\Pi_2}^{(s)}(x)$ . Тогда параллелограмм  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  строится с помощью образующих слоев  $\gamma_{\Pi_1}^{(u)}(x) \cap \gamma_{\Pi_2}^{(u)}(x)$  и  $\gamma_{\Pi_1}^{(s)}(x) \cap \gamma_{\Pi_2}^{(s)}(x)$ .

Пусть  $\zeta$  — конечное или счетное разбиение  $M_0$  на параллелограммы  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ . При этом необходимо еще раз подчеркнуть, в каком смысле  $\{\Pi_j\}$  образуют разбиение. В принципе,  $\Pi_j$  могут пересекаться, но это пересечение должно быть несущественным. Критерием несущественности служит следующее условие: для любых  $\gamma_{\Pi_j}^{(s)}(x), \gamma_{\Pi_k}^{(u)}(x)$

$$\sigma_{\gamma^{(s)}(x)}(\gamma_{\Pi_j}^{(u)}(x) \cap \bigcup_{k \neq j} \gamma_{\Pi_k}^{(u)}(y)) = 0,$$

$$\gamma_{\Pi_k}^{(u)}(y) \cap \gamma_{\Pi_j}^{(u)}(x) = \emptyset$$

$$\sigma_{\gamma^{(u)}(x)}(\gamma_{\Pi_j}^{(s)}(x) \cap \bigcup_{k \neq j} \gamma_{\Pi_k}^{(s)}(y)) = 0.$$

$$\gamma_{\Pi_k}^{(s)}(y) \cap \gamma_{\Pi_j}^{(s)}(x) = \emptyset$$

В дальнейшем, говоря о разбиении, мы будем предполагать выполненным это условие.

**Определение 2.** Разбиение  $\zeta$  называется марковским, если для любого  $x \in \Pi_j$

$$T\gamma_{\Pi_j}^{(s)}(x) \subset \gamma_{\Pi_k}^{(s)}(Tx), \quad Tx \in \Pi_k,$$

$$T^{-1}\gamma_{\Pi_j}^{(u)}(x) \subset \gamma_{\Pi_l}^{(u)}(T^{-1}x), \quad T^{-1}x \in \Pi_l.$$

Условие марковости означает тем самым довольно жесткую согласованность параллелограммов  $\Pi_j$  между собой.

Основное достоинство марковских разбиений состоит в простоте символической динамики, которая строится с их помощью. А именно, для любой точки  $x \in M_0$  напомним последовательность включений  $T^n x \in \Pi_{\omega_n}$ ,  $-\infty < n < \infty$ . Тогда точку  $x$  мы можем «закодировать» бесконечной символической последовательностью  $\omega = \{\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ ,  $\omega_k = 1, 2, \dots$ . Основной вопрос, который всегда при этом возникает, состоит в том, чтобы выяснить, какие последовательности  $\omega$  соответствуют точкам множества  $M_0$ . Легко выписать необходимое условие. Введем матрицу пересечений  $A = \|a_{ij}\|$ , где  $a_{ij} = 1$ , если  $T\Pi_i \cap \Pi_j \neq \emptyset$ , и  $a_{ij} = 0$  в остальных случаях. Тогда очевидно, что должно быть  $a_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1$ ,  $-\infty < n < \infty$ . Оказывается, что это условие также достаточно.

**Теорема 1.** Если  $T, T^{-1}$  непрерывны на каждом  $\Pi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , то для любой последовательности  $\omega = \{\omega_n\}$  такой, что  $a_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1$  при всех  $n$ ,  $-\infty < n < \infty$ , найдется  $y \in M_0$ , для которой  $T^n y \in \Pi_{\omega_n}$ ,  $-\infty < n < \infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вначале слово  $\omega^- = \{\dots, \omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}, \omega_0\}$  и соответствующее ему пересечение  $\Pi_{\omega_0} \cap T\Pi_{\omega_{-1}} \cap \dots \cap T^n \Pi_{\omega_{-n}} = \Pi^{(n)}$ . Покажем, что оно является

параллелограммом. При  $n=0$  это утверждение есть следствие определений. Предполагая его доказанным для  $n-1$ , заметим, что  $\Pi_{\omega_{-1}} \cap \dots \cap T^{n-1} \Pi_{\omega_{-n}} \subseteq \Pi_{\omega_{-1}}$  является в силу этого также параллелограммом. Поэтому  $\Pi^{(n)}$  как пересечение двух параллелограммов снова представляет собой параллелограмм. Далее, в силу марковости  $\Pi^{(n)}$  есть параллелограмм, для которого  $\gamma_{\Pi^{(n)}}^{(u)}(x) = \gamma_{\Pi_0}^{(u)}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{\Pi^{(n)}}^{(s)}(x) &= \gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(s)}(x) \cap T \gamma_{\Pi_{\omega_{-1}}}^{(s)}(T^{-1}x) \cap \dots \cap T^n \gamma_{\Pi_{\omega_{-n}}}^{(s)}(T^{-n}x) = \\ &= T^n \gamma_{\Pi_{\omega_{-n}}}^{(s)}(T^{-n}x). \end{aligned}$$

В силу той же марковости мы получаем убывающую последовательность замкнутых подмножеств  $\gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(s)}(x)$ , пересечение которых, на основании определения устойчивого слоя, состоит из одной точки. Эту точку мы обозначим  $y^-$ , а все пересечение  $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n \Pi_{\omega_{-n}}$  есть слой  $\gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(u)}(y^-)$ . Проводя аналогичные рассуждения при  $n \geq 0$ , мы найдем точку  $y^+$ , для которой  $\gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(s)}(y^+) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \Pi_{\omega_n}$ . Тогда  $y = \gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(u)}(y^-) \cap \gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(s)}(y^+)$  будет искомой. Теорема 1 доказана.

Доказанное утверждение допускает важную интерпретацию с точки зрения теории вероятностей и статистической механики. Оно показывает, что если  $\omega_n$  рассматривать как последовательность значений спиновых переменных статистической механики, то полубесконечная последовательность  $\{\dots, \omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}, \omega_0\}$  отвечает при символическом представлении  $\gamma_{\Pi_{\omega_0}}^{(u)}(y^+)$ .

Тем самым меры  $\nu_{\gamma^{(u)}}$ , которые мы построили в предыдущей лекции, соответствуют с точки зрения статистической механики гиббсовским мерам на пространстве полубесконечных конфигураций  $\omega_n$ ,  $n > 0$ , при фиксированных значениях переменных  $\omega_n$ ,  $n \leq 0$ .

Конечные марковские разбиения существуют для диффеоморфизмов Аносова, для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А Смейла (см. [1], [2], [7]). Для разрывных систем в ряде случаев также удастся построить марковские разбиения, но они оказываются счетными (см., в частности, [3]). Это неизбежно, поскольку из-за разрывного характера зависимости л. у. м.  $\gamma^{(u)}(x)$  от  $x$  образующие множества параллелограммов могут быть только подмножествами канторовских множеств положительной меры.

Мы рассмотрим сейчас следующий общий вопрос. Допустим, что на множестве  $M_0$  (см. начало лекции) задана

инвариантная мера  $\mu$ , которая является гиббсовской по отношению к инвариантному семейству мер  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$  на н. м., построенному в теореме 1 лекции 16. Допустим также, что удалось показать, что для любой неравновесной меры  $\mu_0$ , имеющей плотность по мере Лебега, ее сдвиги  $\mu_n = (T^n)^* \mu_0$ ,  $\mu_n(C) = \mu_0(T^{-n}C)$ , сходятся к мере  $\mu$ , например, в том смысле, что для любой ограниченной измеримой функции  $f$  интегралы  $\int f(x) d\mu_n(x)$  стремятся при  $n \rightarrow \infty$  к  $\int f(x) d\mu(x)$ . Спрашивается, можно ли построить такой функционал  $\mathcal{H}(\mu_0)$  на всем пространстве мер  $\mu_0$  или его достаточно богатом подмножестве, чтобы  $\mathcal{H}(\mu_n) \rightarrow \mathcal{H}(\mu)$  при  $n \rightarrow \infty$  и малость  $\mathcal{H}(\mu_n) - \mathcal{H}(\mu)$  означала бы близость  $\mu_n$  к  $\mu$ .

При этом функционал  $\mathcal{H}(\mu_0)$  должен удовлетворять определенным условиям непрерывности, иначе возможны тривиальные неестественные примеры. Существование такого функционала выражает необратимый характер динамики при обратимости уравнений движения. Сформулированный выше вопрос, насколько нам известно, не обсуждался в надлежащей общности в теории вероятностей. Большое внимание ему уделил И. Р. Пригожин и его сотрудники (см., например, книгу [4] и имеющиеся там ссылки).

Мы предлагаем несколько иной подход по сравнению с [4]. Он основан на той картине эволюции мер, которая была объяснена в двух предыдущих лекциях. Имея неравновесную меру  $\mu_0$ , рассмотрим отвечающие ей условные меры на элементах  $C_\xi$  какого-либо разбиения  $\xi$ , являющихся подмножествами л. н. м.  $\gamma^{(u)}$ . Предположим, что эти меры задаются плотностями по риманову объему. Согласно изложенному в лекциях 16, 17 при действии  $T^n$  условные меры на  $C_\xi$ , отвечающие  $\mu_n$ , сходятся к условным мерам, отвечающим инвариантным семействам мер  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$  на н. м.  $\Gamma^{(u)}$ . При этом условные меры на «больших» подмножествах н. м. сходятся к мере  $\mu$ . Отсюда, в частности, следует, что скорость сходимости  $\mu_n$  к  $\mu$  зависит от гладкости исходных плотностей условных мер. Именно это обстоятельство кладется нами в основу определения функционала  $\mathcal{H}(\mu_0)$ .

Для того чтобы не слишком усложнять дело техническими деталями, мы рассмотрим простейшую ситуацию, где наш подход применим. Пусть  $M$  — двумерный тор,  $T$  —  $C^\infty$ -дiffeоморфизм Аносова, заданный на  $M$ . Содержательным примером может служить  $T(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2), cx_1 + dx_2 + \varepsilon f_2(x_1, x_2))$ , где  $f_1, f_2$  — периодические класса  $C^\infty$  функции периода 1 по каждой переменной,  $|\varepsilon|$  достаточно мало;  $a, b, c, d$  — целые числа,  $\det A = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1$ ,  $|a+d| > 2$ . Приведем нужные нам свойства  $T$  (см. [2]).

1.  $\Gamma^{(u)}(x)$  для каждого  $x$  представляет собой  $C^\infty$ -кривую. При обратном отображении  $M$  на  $\mathbb{R}^2$   $\Gamma^{(u)}(x)$  переходит в  $C^\infty$ -кривую, отстоящую на конечном расстоянии от прямой, идущей по направлению собственного вектора матрицы  $A$  с собственным значением  $\Lambda^{(u)}$ ,  $|\Lambda^{(u)}| > 1$ . В общем случае матрица  $A$  есть матрица автоморфизма одномерной группы гомологий.

У. м.  $\Gamma^{(s)}(x)$  представляют собой аналогичные кривые с заменой одного собственного вектора на другой с собственным значением  $\Lambda^{(s)}$ ,  $|\Lambda^{(s)}| < 1$ . Коэффициенты растяжения  $\lambda^{(u)}(x)$  и сжатия  $\lambda^{(s)}(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in M$ , удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем  $\rho > 0$ , т. е.

$$e^{-C_1(\text{dist}(x, y))^\rho} \leq \frac{\lambda^{(u)}(x)}{\lambda^{(u)}(y)} \leq e^{C_1(\text{dist}(x, y))^\rho}$$

$$e^{-C_1(\text{dist}(x, y))^\rho} \leq \frac{\lambda^{(s)}(x)}{\lambda^{(s)}(y)} \leq e^{C_1(\text{dist}(x, y))^\rho}.$$

2. Простейший параллелограмм  $\Pi$  представляет собой криволинейный четырехугольник, ограниченный двумя отрезками  $\gamma_1^{(u)}(\Pi)$ ,  $\gamma_2^{(u)}(\Pi)$ , представляющими собой л. н. м., и двумя отрезками  $\gamma_1^{(s)}(\Pi)$ ,  $\gamma_2^{(s)}(\Pi)$ , представляющими собой л. у. м.

Если  $\eta$  — конечное разбиение  $M$  на параллелограммы  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$ , то положим  $B^{(u)}(\eta)(B^{(s)}(\eta))$  равным объединению всех  $\gamma_1^{(u)}(\Pi_j)$ ,  $\gamma_2^{(u)}(\Pi_j)$  ( $\gamma_1^{(s)}(\Pi_j)$ ,  $\gamma_2^{(s)}(\Pi_j)$ ) по  $j = 1, \dots, r$ .

3. Всякий  $C^\infty$ -дiffeоморфизм Аносова двумерного тора  $M$  обладает конечным марковским разбиением. Условие того, что  $\eta$  — марковское разбиение, можно выразить при помощи включений  $T(B^{(s)}(\eta)) \subset B^{(s)}(T\eta)$ ,  $T^{-1}(B^{(u)}(\eta)) \subset B^{(u)}(T^{-1}\eta)$ .

4. Пусть  $\eta$  — конечное марковское разбиение на параллелограммы  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$ ,  $\xi^{(u)}(\Pi_j)$  — разбиение  $\Pi_j$  на л. н. м.  $\gamma^{(u)}$ , которые в данном гладком случае представляют собой связные компоненты пересечений  $\Gamma^{(u)}$  с  $\Pi_j$ ;  $\xi_\eta^{(u)}$  — разбиение  $M$ , которое на каждом  $\Pi_j$  совпадает с  $\xi^{(u)}(\Pi_j)$ . Если  $\mu_0$  — произвольная абсолютно непрерывная мера на  $M$ , плотность которой по мере Лебега  $\mu_0(x)$  удовлетворяет условию Гёльдера, то условная мера на почти каждом  $C_{\xi_\eta^{(u)}}$  абсолютно непрерывна относительно длины на  $C_{\xi_\eta^{(u)}} = \gamma^{(u)}$  и плотность как функция на  $M$  также удовлетворяет условию Гёльдера.

Свойство 4 следует из того, что слоение  $M$  на л. н. м. удовлетворяет условию Гёльдера, и из абсолютной непрерывности у. м. и л. м.

Итак, пусть задан  $C^\infty$ -дiffeоморфизм Аносова  $T$  двумерного тора  $M = \text{Тор}^2$ . Выберем для  $T$  конечное марковское

разбиение  $\eta$ . Обозначим  $\mathfrak{M}(C, \rho)$  класс мер  $\mu_0$ , заданных на  $\mathcal{H}$  и таких, что

1) существует такая положительная функция  $\pi_0(x)$ , что на  $\mu_0$ -почти каждом  $C_{\xi_\eta}^{(u)}$  условная мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и ее плотность равна  $\pi_0$ ;

2)  $\left| \frac{\pi_0(x)}{\pi_0(y)} - 1 \right| \leq C [\text{dist}(x, y)]^\rho$  при некотором  $\rho > 0$  и для любых  $x, y \in C_{\xi_\eta}^{(u)}$  и любого элемента  $C_{\xi_\eta}^{(u)}$  разбиения  $\xi_\eta^{(u)}$ .

Вспомним теперь (см. лекцию 16), что динамика создает на каждом  $\Gamma^{(u)}$  свою  $\sigma$ -конечную меру  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$ . Введем отвечающую ей плотность  $\rho_0(x)$ , которую мы символически запишем в виде

$$\rho_0(x) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \lambda^{(u)}(T^{-n}x)}{\int_{C_{\xi_\eta^{(u)}}(x)} \prod_{n=1}^{\infty} \lambda^{(u)}(T^{-n}y) d\sigma_{\gamma^{(u)}}(y)}.$$

В знаменателе  $C_{\xi_\eta^{(u)}}(x) = \gamma^{(u)}$  есть л. н. м., проходящее через  $x$ .

Выше объяснялось, что это выражение имеет смысл, поскольку

$\left| \frac{\lambda^{(u)}(T^{-n}x)}{\lambda^{(u)}(T^{-n}y)} - 1 \right| \leq \text{const} \cdot \lambda^n$  при некотором  $\lambda < 1$  для всех  $y \in \gamma^{(u)}$ .

Положим  $\mathcal{H}(\mu_0) = \max_x \left| \ln \frac{\pi_0(x)}{\rho_0(x)} \right|$ . Для гиббсовской меры  $\mu$ , отвечающей инвариантному семейству мер  $\nu_{\Gamma^{(u)}}$ , очевидно,  $\mathcal{H}(\mu) = 0$ . Обратное утверждение также верно и было объяснено в лекции 17.

**$\mathcal{H}$ -теорема.** Пусть  $\rho < \rho_0$ . Существуют такие  $0 < \delta_1 < 1$  и  $0 < C_1 < \infty$ , зависящие только от  $T$  и констант  $C, \rho$  в определении  $\mathfrak{M}(C, \rho)$ , что при всех  $k > 0$   $\mathcal{H}((T^*)^k \mu_0) \leq C_1 \delta_1^k$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mu_0 \in \mathfrak{M}(C, \rho)$ ,  $\pi_0$  — функция, определяющая условные меры на элементах разбиения  $\xi_\eta^{(u)}$ . Пусть  $\mu_k = (T^*)^k \mu_0$  и  $\pi_k$  — аналогичная функция для  $\mu_k$ . Выведем сейчас явную формулу для  $\pi_k$ . Имеем для любой ограниченной измеримой  $f$

$$\begin{aligned} \int f(x) d\mu_k(x) &= \int_M d\mu_k(C_{\xi_\eta^{(u)}}) \int_{C_{\xi_\eta^{(u)}}} f(x) \pi_k(x) d\sigma_{\gamma^{(u)}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int f(T^k x) d\mu_0(x) = \int_M d\mu_0(C_{\xi_\eta^{(u)}}) \int_{C_{\xi_\eta^{(u)}}} f(T^k x) \pi_0(x) d\sigma_{\gamma^{(u)}}(x). \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных  $T^k x = y$ . Тогда  $y \in T^{-k}(C_{\xi_\eta^{(u)}}(x)) \subset C_{\xi_\eta^{(u)}}(T^{-k}y)$  в силу марковости. Якоби-



ан этого перехода равен  $\frac{d\sigma_{\gamma(u)}(x)}{d\sigma_{\gamma(u)}(y)} = \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}xy)$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_{M|\xi_{\eta}^{(u)}} d\mu_0(C_{\xi_{\eta}^{(u)}}) \int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} f(T^k x) \pi_0(x) d\sigma_{\gamma(u)}(x) &= \\
 &= \int d\mu_0(C_{\xi_{\eta}^{(u)}}) \sum_{C_{T^k \xi_{\eta}^{(u)}} \subset C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \int_{C_{T^k \xi_{\eta}^{(u)}}} \pi_0(x) d\sigma_{\gamma(u)}(x) \times \\
 &\times \frac{1}{\int_{C_{T^k \xi_{\eta}^{(u)}}} \pi_0(x) d\sigma_{\gamma(u)}(x)} \cdot \int_{C_{T^k \xi_{\eta}^{(u)}}} f(T^k x) \pi_0(x) \cdot d\sigma_{\gamma(u)}(x) = \\
 &= \int d\mu_0(C_{\xi_{\eta}^{(u)}}) \sum_{C_{T^k \xi_{\eta}^{(u)}} \subset C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \int_{C_{T^k \xi_{\eta}^{(u)}}} \pi_0(x) d\sigma_{\gamma(u)}(x) \times \\
 &\times \frac{1}{\int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \pi_0(T^{-k}y) \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}y) d\sigma_{\gamma(u)}(y)} \times \\
 &\times \int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} f(y) \pi_0(T^{-k}y) \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}y) d\sigma_{\gamma(u)}(y) = \\
 &= \int d\mu_k(C_{\xi_{\eta}^{(u)}}) \cdot \frac{\int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} f(y) \pi_0(T^{-k}y) \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}y) d\sigma_{\gamma(u)}(y)}{\int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \pi_0(T^{-k}y) \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}y) d\sigma_{\gamma(u)}(y)}.
 \end{aligned}$$

Последняя формула показывает, что

$$\pi_k(y) = \frac{\pi_0(T^{-k}y) \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}y)}{\int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \pi_0(T^{-k}z) \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}z) d\sigma_{\gamma(u)}(z)}. \quad (1)$$

Из нее, в частности, следует, что класс мер  $\mathfrak{M}(C, \rho)$  инвариантен относительно динамики. Кроме того, из нее нетрудно также вывести выражение для меры на факторпространстве  $M|\xi_{\eta}^{(u)}$ , отвечающей  $\mu_k$ . Имеем теперь из (1)

$$\frac{\pi_k(y)}{\rho_0(y)} = \frac{\int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}z) \prod_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^{(u)}(T^{-j}z)}{\lambda^{(u)}(T^{-j}y)} d\sigma_{\gamma(u)}(z)}{\int_{C_{\xi_{\eta}^{(u)}}} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda^{(u)}(T^{-j}z) \frac{\pi_0(T^{-k}z)}{\pi_0(T^{-k}y)} d\sigma_{\gamma(u)}(z)}.$$

В силу того, что  $\lambda^{(u)}$  удовлетворяет условию Гёльдера (см. свойство 1 диффеоморфизма Аносова) при некотором  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ ,

$$e^{-\text{const} \cdot \delta^j} \leq \frac{\lambda^{(u)}(T^{-j}z)}{\lambda^{(u)}(T^{-j}y)} \leq e^{\text{const} \cdot \delta^j}, \quad (2)$$

$$e^{-\text{const} \cdot \delta^k} \leq \prod_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^{(u)}(T^{-j}z)}{\lambda^{(u)}(T^{-j}y)} \leq e^{\text{const} \cdot \delta^k}. \quad (3)$$

Поскольку  $\mu_0 \in \mathfrak{M}(C, \rho)$ , то

$$e^{-\text{const} \cdot \delta^{k^*}} \leq \frac{\pi_0(T^{-k}z)}{\pi_0(T^{-k}y)} \leq e^{\text{const} \cdot \delta^{k^*}}. \quad (4)$$

Из неравенств (2)—(4) вытекает утверждение теоремы.

Возникает естественный вопрос, что происходит с теми же распределениями вероятностей, если  $n \rightarrow -\infty$ ? В рамках нашего подхода ответ на него весьма прост и естествен. Мы должны заменить неустойчивые слои на устойчивые и рассмотреть аналогичный функционал, связанный с устойчивыми слоями. При этом условные меры на устойчивых слоях будут стремиться к пределу, в то время как поведение их вдоль неустойчивых слоев может быть все более нерегулярным.

Перейдем теперь к обсуждению свойств н. м. и у. м., а также марковских разбиений для потоков. Здесь имеется одна особенность, которая иногда облегчает анализ.

Мы обсудим ее на примере геодезического потока на компактной  $S^\infty$ -поверхности отрицательной кривизны (см., в частности, [5]). Итак, пусть  $Q$ —такая поверхность,  $M$ —единичный касательный пучок на  $M$ ,  $\{S^t\}$ —геодезический поток на  $M_\xi$  (см. начало лекции 16 и конец лекции 17). Как уже объяснялось,  $\gamma^{(u)}(x)$  есть оснащение кривой  $\tilde{\gamma}^{(u)}(x)$  единичными векторами нормали, выбранное так, что  $x \in \gamma^{(u)}(x)$  (рис. 18.1). Аналогично строится  $\gamma^{(s)}(x)$ . Глобальные слои  $\Gamma^{(u)}(x)$ ,  $\Gamma^{(s)}(x)$  получаются путем продолжения  $\gamma^{(u)}(x)$ ,  $\gamma^{(s)}(x)$  соответственно.



Рис. 18.1

Обозначим  $\mathcal{M}^{(u)}$ ,  $\mathcal{M}^{(s)}$   $\sigma$ -алгебры, образованные из множеств, состоящих mod 0 из  $\Gamma^{(u)}$ ,  $\Gamma^{(s)}$  соответственно. Следующая лемма есть переформулировка одного из утверждений Э. Хопфа [6]. Напомним, что  $\mathcal{M}^{(\text{inv})}$  есть  $\sigma$ -алгебра множеств инвариантных mod 0 относительно геодезического потока.

Лемма 1.  $\mathcal{M}^{(inv)} \subset \mathcal{M}^{(u)}$ ,  $\mathcal{M}^{(inv)} \subset \mathcal{M}^{(s)}$ , и, следовательно,  $\mathcal{M}^{(inv)} \subset \mathcal{M}^{(u)} \cap \mathcal{M}^{(s)}$ .

Доказательство. Пусть  $f$  — произвольная непрерывная функция,  $\bar{f}^+(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S^t x) dt$  там, где этот предел существует, и  $\bar{f}^+(x) = 0$  в остальных случаях. Из эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина следует, что предел существует почти всюду. Если для  $x$  предел существует, то он существует для любой  $y \in \Gamma^{(s)}(x)$ , поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S^t x) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S^t y) dt = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(S^t x) - f(S^t y)) dt = 0 \end{aligned}$$

и подынтегральное выражение стремится к нулю. Таким образом,  $\bar{f}^+(x)$  постоянно на  $\Gamma^{(s)}(x)$ , т. е.  $\bar{f}^+$  измерима относительно  $\mathcal{M}^{(s)}$ . Поскольку функции  $\bar{f}^+(x)$  плотны в пространстве интегрируемых функций, измеримых относительно  $\mathcal{M}^{(inv)}$ , то  $\mathcal{M}^{(inv)} \subset \mathcal{M}^{(s)}$ . Аналогично доказывается включение  $\mathcal{M}^{(inv)} \subset \mathcal{M}^{(u)}$  и т. д.

Замечание. Утверждение леммы верно и для широких классов преобразований с инвариантной мерой, у которых почти каждая точка  $x$  имеет  $\Gamma^{(s)}(x)$  и  $\Gamma^{(u)}(x)$ .

Из леммы 1 вытекает, что для доказательства эргодичности геодезического потока достаточно установить, что  $\mathcal{M}^{(u)} \cap \mathcal{M}^{(s)} = \mathcal{N}$ , где, напомним,  $\mathcal{N}$  есть тривиальная  $\sigma$ -алгебра подмножеств меры 1 или 0. Возьмем  $\gamma^{(u)}(x)$  и через каждую точку  $y \in \gamma^{(u)}(x)$  проведем  $\gamma^{(s)}(y)$ . При этом мы получим двумерную поверхность, которую обозначим  $\Sigma^{(2)}$  (рис. 18.2). Далее, через каждую точку  $z \in \Sigma^{(2)}$  проведем  $\gamma^{(u)}(z)$ .

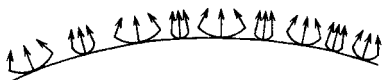


Рис. 18.2

Нетрудно показать, что полученное множество  $\Sigma^{(3)}$  будет открытым подмножеством  $M$ . Небольшие дополнительные усилия требуются для того, чтобы показать, что  $\Sigma^{(3)}$  принадлежит mod 0 одной эргодической компоненте. При этом существенную роль играет обсуждавшееся в лекции 17

свойство абсолютной непрерывности. Свойство слоев  $\Gamma^{(s)}$ ,  $\Gamma^{(u)}$ , состоящее в том, что при описанной конструкции множества  $\Sigma^{(3)}$  оказывается открытыми, называется *неинтегрируемостью слоев*, образованных многообразиями  $\Gamma^{(s)}$  и  $\Gamma^{(u)}$ . Из неинтегрируемости сравнительно просто вытекает эргодичность.

Кроме того, из-за неинтегрируемости слоений слегка видоизменяется определение марковского разбиения для потоков. Пусть  $\gamma \subset M$  — какая-либо  $C^\infty$ -кривая,  $C^1$ -близкая к какому-либо л. н. м.  $\gamma^{(u)}$ . Проведем через каждую точку  $y \in \gamma^{(u)}$  какое-либо л. у. м.  $\gamma^{(s)}(y)$  и образуем двумерную поверхность

$$\Sigma^{(s)}, \Sigma^{(s)} = \bigcup_{y \in \gamma} \gamma^{(s)}(y). \text{ Предполо-$$

жим, что концы  $\gamma^{(s)}(y)$  выбраны так, что  $\Sigma^{(s)}$  имеет кусочно-гладкую границу. Через  $\xi^{(s)}(\Sigma^{(s)})$  обозначим разбиение  $\Sigma^{(s)}$  на кривые  $\gamma^{(s)}(y)$ .

**Определение 3.** *Набор непересекающихся поверхностей  $\Sigma_1^{(s)}, \Sigma_2^{(s)}, \dots, \Sigma_r^{(s)}$  называется s-марковским множеством, если каждая кривая  $\gamma_i$ , отвечающая  $\Sigma_i^{(s)}$ , может быть разбита на*

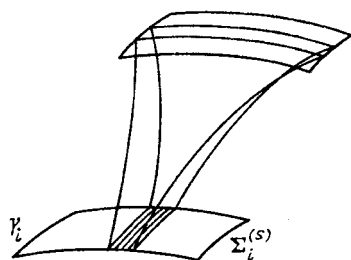


Рис. 18.3

дуги  $\gamma_{ij}$  таким образом, что на каждой дуге можно задать положительную непрерывную функцию  $\tau_{ij}$  и при этом (рис. 18.3)

1.  $S^t \gamma^{(s)}(y) \cap \bigcup_{n=1}^r \Sigma_n^{(s)} = \emptyset$  при  $0 < t < \tau_{ij}(y)$ , и при любом  $y \in \gamma_{ij}$ ;
2.  $S^{\tau_{ij}(y)} \gamma^{(s)}(y) \subset \gamma^{(s)}(y')$  для некоторого  $y' \in \gamma_k \subset \Sigma_k^{(s)}$ ;
3. для любого  $y' \in \gamma_k$  найдется  $y'' \in \gamma_{ij}$  такое, что

$$S^{\tau_{ij}(y'')} \gamma^{(s)}(y'') \subset \gamma^{(s)}(y').$$

Аналогичным образом можно определить *и-марковское* множество, заменив  $t$  на  $-t$ . И *s-* и *и-марковские* множества существуют. С их помощью можно доказать целый ряд важных топологических и статистических свойств рассматриваемых геодезических потоков, в частности равномерную распределенность замкнутых геодезических, центральную предельную теорему и т. п. В ряде случаев марковские множества можно описать достаточно явно.

Вернемся к кусочно-гладким отображениям, для которых можно построить конечные марковские разбиения. Пусть  $T$  — одно из таких отображений,  $\alpha = \{C_1, \dots, C_r\}$  — отвечающее

ему марковское разбиение. Через  $\Omega$  обозначим пространство последовательностей  $\omega = \{\omega_n\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ , каждое  $\omega_n$  принимает значения  $1, \dots, r$ . Через  $S$  обозначим сдвиг в пространстве  $\Omega$ . Для  $x \in M$  построим  $\omega$ , для которой  $T^n x \in C_m$ ; тогда отображение  $\pi: x \mapsto \omega$  определяет символическое представление  $T$ , которое строится при помощи разбиения  $\alpha$ . Основное свойство символического представления состоит в том, что  $S\pi = \pi T$ , т. е. любое преобразование  $T$  переходит в сдвиг. Поэтому, если  $\nu$  — инвариантная мера для  $T$ , то  $\nu^* = \pi^* \nu$ , где  $\nu^*(C) = \nu(\pi^{-1}C)$ , есть инвариантная мера для  $S$ . Сейчас мы опишем кратко идею так называемого метода термодинамического формализма, который дает возможность исследовать свойства инвариантных мер  $T$  (см. [7], [8]).

Будем рассматривать пространство  $\Omega$  как пространство конфигураций решетчатой спиновой системы статистической механики, в которой отдельная спиновая переменная  $\omega_n$  принимает значения  $1, 2, \dots, r$ . В равновесной статистической механике рассматривают свойства распределений Гиббса. В применении к нашей ситуации эти распределения строятся следующим образом. Возьмем функцию  $U(\omega_0, \omega_{-1}, \omega_{+1}, \omega_{-2}, \omega_2, \dots, \omega_{-k}, \omega_k, \dots)$ , про которую мы предположим, что при некоторых постоянных  $C < \infty$  и  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ ,

$$\sup_{\omega, \omega', \omega''} |U(\omega_0, \omega_{-1}, \omega_1, \dots, \omega_{-k}, \omega_k, \omega'_{-k-1}, \omega'_{k+1}, \dots) - U(\omega_0, \omega_{-1}, \omega_1, \dots, \omega_{-k}, \omega_k, \omega''_{-k-1}, \omega''_{k+1}, \dots)| \leq C\rho^k.$$

Далее, для любых  $m > 0$ ,  $n > 0$  рассмотрим отрезок  $[-m, n]$  и конфигурацию  $\bar{\omega} = \{\bar{\omega}_k, k \in [-m, n]\}$ . Тогда мы можем построить распределение вероятностей  $P_{m,n}$  на пространстве конфигураций  $\omega_k$ ,  $-m \leq k \leq n$ , для которого

$$p_{m,n}(\omega_k, -m \leq k \leq n) = \frac{1}{\Xi_{m,n}(\bar{\omega})} \exp \sum_{k=-m}^n U(\omega_k, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots),$$

где в качестве переменных вне  $[-m, n]$  берутся  $\bar{\omega}_j$ . Множитель  $\Xi_{m,n}(\bar{\omega})$ , называемый статистической суммой, выбирается исходя из условий нормировки. Используя рассуждения, близкие к рассуждениям лекции 12, можно показать, что при  $m, n \rightarrow \infty$  распределения  $P_{m,n}$  слабо сходятся к пределу  $P$ , который не зависит от выбора граничных условий  $\bar{\omega}$ . Функция  $U$  называется иногда потенциалом, а  $P$  — распределением Гиббса, отвечающим этому потенциалу.

Терминология, которой мы придерживались в этой части книги, непосредственно связана с терминологией статистической механики. Возьмем  $U = \ln \lambda^{(u)}(x)$ . Тогда гиббсовские меры,

которые мы изучали в лекциях 16, 17, представляют собой гиббсовские меры статистической механики, строящиеся при помощи потенциала  $U$ . Большую роль играет также мера, отвечающая  $U=0$ , которая часто оказывается мерой с максимальной энтропией. Она участвует в теоремах, связанных с равномерным распределением периодических траекторий.

## ССЫЛКИ И КОММЕНТАРИИ

1° Понятие марковского разбиения появилось впервые в работе [1] Синай Я. Г. Марковские разбиения и  $Y$ -диффеоморфизмы // Функцион. анализ и его прил.—1968.—Т. 2, № 1.—С. 64—89.

Определение, использованное в этой лекции, было предложено Р. Боуэном, см. его книгу

[2] Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms // Lecture Notes in Math.—Berlin, New York: Springer-Verlag, 1975.—V. 470.

Эта книга показывает, как марковские разбиения могут быть использованы для анализа свойств стохастичности детерминированных динамических систем.

Счетные марковские разбиения для одного класса бильярдов были построены в работе

[3] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И. Марковские разбиения для двумерных гиперболических бильярдов // УМН.—1990.—Т. 45, № 3.

Подход Пригожина к  $H$ -теореме для динамических систем изложен в его книге

[4] Prigogin I. R. From Being to Becoming [Рус. пер. Пригожин И. Р.]

В этой же книге можно найти ссылки на другие работы И. Р. Пригожина и его соавторов, посвященные этой теме.

2° Теория геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны представляет собой важный раздел эргодической теории. Она связана со многими проблемами дифференциальной геометрии, теории представлений, теории чисел, теории уравнений в частных производных и т. д. Эргодические свойства таких потоков изложены в книге

[5] Аносов Д. В. Геодезические потоки на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. института им. В. А. Стеклова.—1967.—Т. 90.—210 с.

Лемма Хопфа содержится в его работе

[6] Hopf E. Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten von negativer Krümmung.—Leipzig: Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss., 1939.—B. 91.—S. 261—364.

3° Термодинамический формализм излагается в книге

[7] Ruelle D. Thermodynamic Formalism. Encyclopedia of Math. and its Appl. Vol. 5.—Read. Mass.: Addison—Wesley, 1978.

Идеи термодинамического формализма появились впервые в работе

[8] Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН.—1972.—Т. 27, № 4.—С. 21—64.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоморфизм (сдвиг) Бернулли 14  
 — Маркова 14  
 — пространства с мерой 7  
 — с чисто точечным спектром 39  
 Адамара—Перрона теорема 178  
 — — — для гиперболических точек 138  
  
 Белых отображение 165  
 Биллиард внутри многоугольника 30  
 — двумерный рассеивающий 175  
 Биркгофа—Хинчина эргодическая теорема 16  
 Бреймана теорема 67  
  
 Вращения число для гомеоморфизмов окружности 89  
 Временная корреляционная функция 24  
 Временное среднее 16  
  
 Гамильтонова система 12  
 Гаусса отображение 9  
 Геодезическая класса  $A$  130  
 Геодезический поток 12  
 — — на компактном многообразии отрицательной кривизны 173  
 — — обобщенный 162  
 Гетероклиническая точка 139  
 Гиббсовская мера 179  
  
 Гиперболическая неподвижная точка 137  
 — периодическая точка 137  
 — точка 178  
 $\alpha$ -гиперболическая точка 178  
 $\omega$ -гиперболическая точка 178  
 Гиперболичности условие 177  
 Гомоклиническая точка 138  
 Групповой автоморфизм 10  
 — сдвиг 10  
 — эндоморфизм 10  
  
 Данжуа теорема 90  
 Динамика системы автоматов 75  
  
 Измеримое разбиение 19  
 Измеримый полупоток 9  
 — поток 9  
 Инвариантная мера 8  
 Инвариантное множество (автоморфизма) 21  
 — семейство мер 170  
  
 Канонический изоморфизм 181  
 Кингмана субаддитивная эргодическая теорема 17  
 Конфигурация клеточных автоматов 75  
 Косой сдвиг (на торе) 10  
 $K$ -автоморфизм 69  
 $K$ -поток 70  
  
 Лебега пространство 19  
 Лиувилля теорема 11

Лози отображение 164  
Локальное неустойчивое многообразие 168  
— устойчивое многообразие 168  
Локальный коэффициент растяжения 174  
— — сжатия 174  
Лоренца система 165

Маркова автоморфизм 14  
— сдвиг 14  
Марковское разбиение для групповых автоморфизмов двумерного тора 36  
— — — отображений 188  
 $s$ -марковское множество 196  
Мера инвариантная эндоморфизма 8  
Метрический изоморфизм динамических систем 31  
— инвариант динамической системы 31  
Мешалкина пример изоморфизма сдвигов Бернулли 32  
Многообразия с кусочно-гладкой границей 163

Неподвижное разбиение 21  
Непрерывная дробь 82  
Неустойчивое многообразие 169

Обри—Мезера множество 131  
Одномерное отображение со стохастическим поведением 124  
Орисфера 174  
Орицикл 174  
Основная теорема для растягивающих отображений 115  
— — о спектральной классификации унитарных операторов 26  
Основное состояние 127  
Отображение с перекручиванием 129

Параллелограмм 187  
Перекладывание отрезков 27

Перемешивание 24  
Пересечение измеримых разбиений 20  
Перрона—Фробениуса—Рюэлля оператор 9  
Пинскера разбиение 68  
Полупоток измеримый 9  
Поток измеримый 9  
— с чисто точечным спектром 50  
Произведение измеримых разбиений 20  
Пуанкаре теорема о возвращении 17  
— — о существовании чисел вращения 89

Разложение динамической системы на эргодические компоненты 23  
Растягивающее отображение окружности 115  
Рохлина критерий (для образующих разбиений) 34

Сдвиг 13  
Слабое перемешивание 25  
Спектр динамической системы 24  
Стандартное отображение 128  
Стационарный случайный процесс 13  
Стохастический слой 160  
Строгая эргодичность 42  
Счетное образующее разбиение 33, 34  
Счетнократный лебеговский спектр 26

Точный эндоморфизм 70  
Транзитивное перекладывание отрезков 27  
 $H$ -теорема для динамических систем 190

Условная мера (на элементе разбиения) 20  
— энтропия разбиения 53  
Устойчивое многообразие 169



Фарей дробь 87  
Фейгенбаума аттрактор 43  
— универсальность 108  
Френкеля—Конторовой модель  
127

Характер абелевой группы 39

Чирикова отображение 128  
Чирикова—Тейлора отображе-  
ние 128

Шарковского порядок 104  
— теорема 104

Эндоморфизм пространства с ме-  
рой 7

Эно отображение

Энтропия группы коммутирую-  
щих автоморфизмов 74

— метрическая эндоморфизма 55

— образующего разбиения на  
единицу времени 59

— разбиения на единицу времени  
55

— счетного разбиения 53

Эргодическая динамическая сис-  
тема 22

Эрмана теорема 90

Якобсона теорема 125